

Freie Universität Berlin
Fachbereich Mathematik und Informatik

Degeneration von Grassmannschen zu Torischen Varietäten

Diplomarbeit in Mathematik

vorgelegt von
Sebastian Böthin
am 16. November 2007

Betreuung
Prof. Dr. Klaus Altmann

Ehrenwörtliche Erklärung

Ich erkläre hiermit ehrenwörtlich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig angefertigt habe; die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit wurde bisher keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und ist auch noch nicht veröffentlicht.

Ich bin mir bewusst, dass eine unwahre Erklärung rechtliche Folgen haben wird.

Berlin, den 16. November 2007

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	3
Allgemeine Voraussetzungen und Notation	4
1 Die Grassmannsche und der projektive Raum	5
1.1 Epimorphismen unter Gruppenwirkung	5
1.2 Die Grassmannsche Varietät	10
1.3 Die Grassmannsche unter Torus-Wirkung	15
2 Die Torische Varietät $X(k, n)$	21
2.1 Eine degenerierte Determinante	21
2.2 Modellierung durch Punktkonfigurationen	24
2.3 Parametrisierung durch Ordnungsideale	28
2.4 Eine Basis für das torische Ideal $I_{k,n}$	32
2.5 Das Ordnungspolytop $\mathcal{P}_{k \times (n-k)}$	36
2.6 Der Grad von $X(k, n)$	44
3 Degeneration der Grassmannschen	47
3.1 Die klassischen Plücker-Relationen	47
3.2 Eine Basis für das Plücker-Ideal $\mathcal{J}_{k,n}$	53
3.3 Plücker-Relationen in der Darstellungstheorie	60
3.4 Die flache Deformation der Grassmannschen	63
Literatur	67

Einleitung

Ausgangspunkt dieser Arbeit ist die in [GL96] vorgestellte und in [BCK98] sowie [Stu95] und [MS04] weiterentwickelte Degeneration von partiellen Fahnenvarietäten zu Torischen Varietäten. Wesentliche Strukturmerkmale dieser Degeneration lassen sich anhand der Degeneration der *Grassmannschen* als Prototyp einer partiellen Fahnenvarietät darstellen, auf die hier eingegangen wird.

Die Arbeit gliedert sich in drei Teile. Gegenstand des ersten Teils ist die Einführung der Grassmannschen, die als Algebraische Varietät die Menge aller Unterräume einer festen Dimension in einem vorgegebenen endlichdimensionalen Vektorraum parametrisiert. Die Ergebnisse hierzu gehören zum klassischen Repertoire der Algebraischen Geometrie und wurden bereits ausführlich in [HP53] hergeleitet und seitdem von verschiedenen Autoren aufgegriffen und in moderne Terminologie übertragen. Als Referenzen dienen hier im Wesentlichen [GH78], [Har92] und [EH99]. Es wird in 1.1 zunächst eine Herleitung dieses Gegenstandes aus möglichst elementaren Begriffen der linearen, bzw. multilinearen, Algebra angegeben und in 1.2 eine Übertragung aus der multilinearen Algebra in die Sprache der Algebraischen Geometrie vorgestellt. Nicht berücksichtigt wird hier die Sichtweise der klassischen Topologie oder der Differentialgeometrie.

Bei *Torischen Varietäten* handelt es sich um eine Klasse von Algebraischen Varietäten, deren geometrische Struktur sich vollständig auf Begriffe der konvexen Geometrie abbilden läßt. Die klassischen Referenzen hierzu sind [Oda88] und [Ful93]. Ausgehend von einer naheliegenden algebraischen Vereinfachung der Grassmannschen (2.1) wird im zweiten Teil eine Beschreibung der von [GL96] angegebenen Torischen Varietät aus der kombinatorischen Algebra heraus entwickelt. Die Beschreibung der algebraischen Struktur mit Hilfe der Ordnungstheorie, die in 2.3 ausgeführt und in 2.5 entsprechend der Theorie Torischer Varietäten in Begriffen der konvexen Geometrie interpretiert wird, ist im Kern eine Ausführung der Bemerkung 11.11 in [Stu95].

Um die Degeneration der Grassmannschen in 3.4 im Sinne der Deformationstheorie zu präzisieren, wird im dritten Teil gezeigt, dass die in 2.4 angegebenen Binome, die eine minimale Erzeugermenge des Ideals der Torischen Varietät aus dem zweiten Teil bilden, sich als "Initialpolynome" von Erzeugern des *Plücker-Ideals* der Grassmannschen herausstellen, wobei hier unter einem Initialpolynom eine Verallgemeinerung des aus der Theorie der Gröbner-Basen bekannten *Initialterms* zu verstehen ist. Dazu wird in 3.1 zunächst eine Herleitung der klassischen *Plücker-Relationen* vorgestellt, die sich an den Darstellungen aus [GH78] und [Har92] orientiert, und die in 3.2 als Grundlage für die Konstruktion einer Gröbner-Basis des Plücker-Ideals dient. Wie in 3.3 kurz angedeutet wird, sind entsprechende Aussagen über das Plücker-Ideal bereits aus Begriffen der Darstellungstheorie heraus entwickelt worden, während die hier ausgeführte explizite Berechnung eine genaue Eingrenzung der zulässigen Charakteristik des zugrundeliegenden Körpers ermöglicht.

Allgemeine Voraussetzungen und Notation

Soweit nicht abweichend definiert, bezeichnen stets n und k zwei natürliche Zahlen mit $0 < k < n$ und K einen algebraisch abgeschlossenen Körper von Charakteristik $\text{char } K = 0$ oder $\text{char } K > k$. Da, abgesehen von Beispielen, grundsätzlich dieser Körper zugrundegelegt wird, wird die Indizierung durch K zur Abkürzung der Notation oft ausgelassen und implizit vorausgesetzt.

Sofern aus dem Kontext heraus klar ist, was jeweils gemeint ist, wird zur Abkürzung gelegentlich eine Menge der Form $\{1, \dots, n\}$ mit der Zahl n notiert. Beispielsweise wird mit $\binom{n}{k}$ sowohl die Zahl

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

als auch die Menge

$$\binom{n}{k} = \{\sigma \subset \{1, \dots, n\} : |\sigma| = k\}$$

bezeichnet. Um Bezug auf die Elemente von $\sigma \in \binom{n}{k}$ in ihrer Anordnung zu nehmen, wird $\sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ mit $1 \leq \sigma_1 < \dots < \sigma_k \leq n$ kurz mit $\sigma = \{\sigma_1 < \dots < \sigma_k\}$ notiert.

Weitere Bezeichnungen

\mathbb{N}	Halbgruppe der natürlichen Zahlen $0, 1, 2, \dots$
\mathbb{Z}	Gruppe der ganzen Zahlen
K^*	multiplikative Gruppe $K \setminus \{0\}$
V^\vee	Dualraum zu einem K -Vektorraum V
V^\perp	Annulator eines K -Vektorraums V
$E_m V$	Menge der Epimorphismen $V \rightarrow K^m$ (S.6)
$E_{k \times n}$	Menge der $(k \times n)$ -Matrizen vom Rank k über K (S.10)
$\bigwedge^m V$	m -faches äußeres Produkt über V (S.8)
$\text{Sym}^m V$	m -faches symmetrisches Produkt über V (S.47)
GL_m	Allgemeine Lineare Gruppe über K^m
\mathfrak{S}_S	Permutationsgruppe über einer Menge S
$K[S]$	Halbgruppenalgebra über einer Halbgruppe S
$K[\mathbf{x}]$	Polynomring über einem endlichen Variablensystem \mathbf{x}
\mathbb{A}^m	m -dimensionaler affiner Raum über K
\mathbb{P}^m	m -dimensionaler projektiver Raum über K
\mathbb{T}^m	m -dimensionaler Torus über K
$[x_1 : \dots : x_m]$	homogene Koordinaten $K^*(x_1, \dots, x_m)$
$\mathcal{I}(P)$	Verband der Ordnungsideale über einer Ordnung P (S.28)
$e(P)$	lineare Erweiterungen einer partiellen Ordnung P (S.31)
$x \perp y$	Unvergleichbarkeitsrelation in einer partiellen Ordnung

Im Übrigen orientiert sich die Notation an der Standard-Literatur (insbes. [Har77], [Ful93], sowie [FH91]).

1 Die Grassmannsche und der projektive Raum

1.1 Epimorphismen unter Gruppenwirkung

Es sei V ein n -dimensionaler K -Vektorraum und $0 < k < n$. Die *Grassmannsche* ist die Menge

$$\mathfrak{G}(k, V) := \{L \leq V : \dim_K L = k\} \quad (1.1.1)$$

aller k -dimensionalen Unterräume von V . Diese Menge soll in diesem Abschnitt in elementaren Begriffen der Linearen Algebra mit einer Struktur versehen und mit dem Konzept des projektiven Raumes in Beziehung gesetzt werden.

Zur Festlegung der Notation werden zunächst kurz die hier wesentlichen Eigenschaften einer *Gruppenwirkung*¹ zusammengefasst,

1.1.2 DEFINITION+PROPOSITION

Es sei G eine Gruppe mit neutralem Element 1 . Eine *Wirkung* von G auf einer Menge X (G -Wirkung) ist eine Abbildung

$$G \times X \longrightarrow X, (g, x) \longmapsto g \cdot x,$$

mit den Eigenschaften $1 \cdot x = x$ für alle $x \in X$ und $g \cdot (h \cdot x) = gh \cdot x$ für alle $g, h \in G$ und alle $x \in X$. Die G -Wirkungen auf X entsprechen in natürlicher Weise den Gruppenhomomorphismen von G in die Permutationsgruppe von X , wobei insbesondere $x \longmapsto g \cdot x$ für $g \in G$ jeweils eine Permutation von X bildet.

- (i) Ein G -Morphismus zwischen zwei G -Wirkungen auf X und Y ist eine G -invariante Funktion $f: X \longrightarrow Y$, d.h. eine Funktion, die $f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$ für alle $g \in G$ und alle $x \in X$ erfüllt. Ein bijektiver G -Morphismus heißt G -Isomorphismus.
- (ii) Ist H eine Untergruppe von G , so wirkt G auf den Nebenklassen G/H mit $g \cdot hH = ghH$ für $g, h \in G$.
- (iii) Eine Teilmenge $Y \subset X$ heißt *invariant* unter der Wirkung von G , wenn $g \cdot y \in Y$ für alle $y \in Y$. In diesem Fall wird eine G -Wirkung auf Y induziert.
- (iv) Für $x \in X$ heißt die invariante Teilmenge $G(x) := \{g \cdot x : g \in G\} \subset X$ der *Orbit* von x . Die Orbits bilden eine Zerlegung von X in Äquivalenzklassen, deren Restklassenmenge als Quotient X/G bezeichnet wird. Gibt es nur einen Orbit, so heißt die Wirkung *transitiv*.
- (v) Für $x \in X$ heißt die Untergruppe $G_x := \{g \in G : g \cdot x = x\}$ die *Isotropiegruppe* von x . Es gilt $G_{g \cdot x} = gG_xg^{-1}$ für alle $g \in G$ und alle $x \in X$. Eine G -Wirkung heisst *frei*, wenn $G_x = \{1\}$ für alle $x \in X$. Zu jedem $x \in X$ ist die Abbildung $G/G_x \longrightarrow G(x)$ mit $gG_x \longmapsto g \cdot x$ ein G -Isomorphismus.

Die multiplikative Gruppe $K^* = K \setminus \{0\}$ wirkt auf dem Vektorraum V durch Skalarmultiplikation und läßt dabei die Menge $V \setminus \{0\}$ invariant. Aus der induzierten freien K^* -Wirkung auf $V \setminus \{0\}$ erhält man als Quotienten den *projektiven Raum*

$$\mathbb{P}V := (V \setminus \{0\})/K^*,$$

¹Eine ausführliche Behandlung findet sich z.B. in [Kaw91].

dessen Elemente $\mathbb{K}^*(v)$ für $v \in V \setminus \{0\}$ mit $[v]$ notiert werden. Man kann jeden Vektor $v \in V$ als eine Linearform auf dem Dualraum $V^\vee = \text{Hom}(V, \mathbb{K})$ auffassen, die genau dann surjektiv ist, wenn v von Null verschieden ist. In diesem Fall ist der Kern eine Hyperebene in V^\vee mit Annulator $(\ker v)^\perp = \mathbb{K}v = [v] \cup \{0\}$ im Bidualraum $V^{\vee\vee} = V$, was die Identifikation

$$\mathbb{P}V = \mathfrak{G}(1, V) = \mathfrak{G}(n-1, V^\vee) \quad (1.1.3)$$

motiviert. Allgemeiner ist der Vektorraum $\text{Hom}(V, \mathbb{K}^k)$ für $0 < k < n$ ein linksseitiger Modul über der Endomorphismen-Algebra $\text{End } \mathbb{K}^k$, und die Teilmenge

$$E_k V := \{f \in \text{Hom}(V, \mathbb{K}^k) : f \text{ surjektiv}\}$$

der Epimorphismen $V \rightarrow \mathbb{K}^k$ ist unter der Wirkung der Einheitengruppe GL_k in $\text{End } \mathbb{K}^k$ invariant.

1.1.4 PROPOSITION

Zu $f, \varphi \in E_k V$ gibt es genau dann einen Automorphismus $g \in \text{GL}_k$ mit $\varphi = gf$, wenn $\ker f = \ker \varphi$. Im Existenzfall ist g eindeutig bestimmt.

Beweis. Es ist klar, dass $\ker gf = \ker f$ für $g \in \text{GL}_k$ gilt. Sei andererseits $\ker f = \ker \varphi = L$. Dann erfüllt $g := \overline{\varphi} \overline{f}^{-1}$ die Behauptung, wobei $\overline{f}, \overline{\varphi}: V/L \rightarrow \mathbb{K}^k$ die induzierten Isomorphismen bezeichnet. Die Eindeutigkeit ist klar, da Epimorphismen rechtsseitig kürzbar sind: $gf = \tilde{g}f$ impliziert $g = \tilde{g}$. \square

Die Gruppe GL_k wirkt also wiederum frei auf der Menge $E_k V$ und die Identifikation 1.1.3 lässt sich verallgemeinern, indem jeder Orbit $\text{GL}_k(f)$ mit dem Unterraum $\ker f \in \mathfrak{G}(n-k, V)$ oder dessen Annulator $(\ker f)^\perp \in \mathfrak{G}(k, V^\vee)$ assoziiert wird. Man erhält ein kommutatives Diagramm von Bijektionen:

$$\begin{array}{ccc} & E_k V / \text{GL}_k & \\ \swarrow & & \searrow \\ \mathfrak{G}(n-k, V) & \longleftrightarrow & \mathfrak{G}(k, V^\vee) \end{array} \quad (1.1.5)$$

1.1.6 PROPOSITION

Zu $f, \varphi \in E_k V$ existiert immer ein Automorphismus $h \in \text{GL } V$ mit $\varphi = fh$.

Beweis. Dies folgt daraus, dass V als \mathbb{K} -Vektorraum ein freier und daher projektiver Modul ist: Es gibt $h, h' \in \text{End } V$ mit $\varphi = fh$ und $f = \varphi h'$, also $f = fh h'$ und $\varphi = \varphi h' h$, woraus, da f und φ Epimorphismen sind, $h h' = h' h = \text{id}_V$, also $h \in \text{GL } V$, folgt. \square

Es liegt also eine transitive Wirkung

$$\text{GL } V \times E_k V \longrightarrow E_k V, \quad h \cdot f = fh^{-1},$$

vor, die wegen der Assoziativität $(gf)h = g(fh)$ mit der GL_k -Wirkung kommutiert, so dass eine transitive $\text{GL } V$ -Wirkung auf dem Quotienten $E_k V / \text{GL}_k$ induziert wird.

1.1.7 PROPOSITION

Die Bijektionen 1.1.5 sind $\text{GL } V$ -Isomorphismen, wobei $\text{GL } V$ auf $\mathfrak{G}(n-k, V)$ mit $L \mapsto h(L)$ und auf $\mathfrak{G}(k, V^\vee)$ mit $L \mapsto h^{-1\vee}(L)$ für $h \in \text{GL } V$ operiert.

Beweis. Die Bijektion $E_k V / GL_k \rightarrow \mathfrak{G}(n-k, V)$ ist wegen $\ker fh^{-1} = h(\ker f)$ $GL V$ -invariant, und für $E_k V / GL_k \rightarrow \mathfrak{G}(k, V^\vee)$ erhält man

$$\begin{aligned} (GL_k)(fh^{-1}) &\mapsto (\ker fh^{-1})^\perp = \text{im}(fh^{-1})^\vee \\ &= \text{im } h^{-1\vee} f^\vee = h^{-1\vee}(\text{im } f^\vee) = h^{-1\vee}((\ker f)^\perp). \end{aligned}$$

Für die Bijektion $\mathfrak{G}(n-k, V) \rightarrow \mathfrak{G}(k, V^\vee)$ ist zu zeigen, dass $h(L)^\perp = h^{-1\vee}(L^\perp)$ für $L \in \mathfrak{G}(n-k, V)$ gilt: ist $\varphi \in h(L)^\perp$, so ist $\psi := \varphi h \in L^\perp$, also $\varphi = \psi h^{-1} = h^{-1\vee}(\psi) \in h^{-1\vee}(L^\perp)$, und aus $\varphi = \psi h^{-1} \in h^{-1\vee}(L^\perp)$ mit $\psi \in L^\perp$ folgt $\varphi \in h(L)^\perp$. \square

Zu bemerken ist, dass die $GL V$ -Wirkung auf $\mathfrak{G}(k, V^\vee)$ in 1.1.7 der $GL V$ -Wirkung auf $\mathfrak{G}(n-k, V)$ unter dem natürlichen Isomorphismus

$$GL V \xrightarrow{\cong} GL V^\vee, h \mapsto h^{-1\vee} = h^{\vee-1} \quad (1.1.8)$$

entspricht, so dass die Aussage symmetrisch für V^\vee unter Identifikation von $GL V$ mit $GL V^\vee$ gilt.

Anstatt einen Vektor $0 \neq v \in V$ wie in 1.1.3 als Epimorphismus $V^\vee \rightarrow \mathbb{K}$ aufzufassen, kann man ihn genausogut mit dem durch $c \mapsto cv$ gegebenen Monomorphismus $\mathbb{K} \hookrightarrow V$ identifizieren. Allgemein erhält man durch Übergang zu dualen Abbildungen völlig analoge Ergebnisse, wenn man $\mathfrak{G}(k, V)$ mit den Bildern der Monomorphismen $\mathbb{K}^k \hookrightarrow V$ modulo der GL_k -Wirkung $\varphi \mapsto \varphi g^{-1}$ assoziiert und $GL V$ mit $\varphi \mapsto h\varphi$ operieren läßt. Es ergibt sich ein zu 1.1.5 "duales" Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & \{\text{Monomorphismen } \mathbb{K}^k \hookrightarrow V\} / GL_k & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ \mathfrak{G}(k, V) & \longleftrightarrow & \mathfrak{G}(n-k, V^\vee) \end{array}$$

von $GL V$ -Isomorphismen.

1.1.9 BEMERKUNG

Die Isotropiegruppen

$$(GL V)_L = \{h \in GL V : h(L) = L\}$$

zu $L \in \mathfrak{G}(k, V)$ sind immer nichttriviale echte Untergruppen in $GL V$, die wegen der Transitivität der Wirkung alle zueinander konjugiert sind, so dass zu jedem $L \in \mathfrak{G}(k, V)$ ein Isomorphismus

$$\mathfrak{G}(k, V) = (GL V)(L) \cong_{GL V} (GL V) / (GL V)_L$$

existiert, der eine Beschreibung von $\mathfrak{G}(k, V)$ als Menge von $GL V$ -Nebenklassen liefert. Man erhält die Isotropiegruppe zu $L \in \mathfrak{G}(k, V)$ in der Form

$$(GL V)_L = \left\{ \varphi f' + \varphi' f : \begin{array}{l} \varphi' : \mathbb{K}^{n-k} \hookrightarrow V, \quad f' : V \rightarrow \mathbb{K}^k, \\ \text{im } \varphi' \cap L = 0, \quad \ker f' \cap L = 0 \end{array} \right\}$$

für ein Paar (φ, f) aus der exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{K}^k \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{f} \mathbb{K}^{n-k} \longrightarrow 0,$$

d.h. die Gruppenelemente entsprechen den Paaren von Monomorphismen $\varphi: \mathbb{K}^k \hookrightarrow V$ und Epimorphismen $f: V \twoheadrightarrow \mathbb{K}^{n-k}$ mit $f\varphi = 0$, was hier $\ker f = \operatorname{im} \varphi$ impliziert. Diese Sichtweise ergibt sich aus dem Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{K}^k & \xrightarrow{\varphi} & V & \xrightarrow{f} & \mathbb{K}^{n-k} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & \swarrow f' & \downarrow h & \swarrow \varphi' & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{K}^k & \xrightarrow{\varphi} & V & \xrightarrow{f} & \mathbb{K}^{n-k} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

wobei $f'\varphi \in \operatorname{GL}_k$ und $f\varphi' \in \operatorname{GL}_{n-k}$, sowie $h = \varphi f' + \varphi' f \in \operatorname{GL} V$.

1.1.10 BEISPIEL

Es sei $V = \mathbb{K}^n$ mit der Standardbasis (e_1, \dots, e_n) versehen. Die Isotropiegruppe von $L_0 = \operatorname{span} \{e_1, \dots, e_k\} \in \mathfrak{G}(k, \mathbb{K}^n)$ ist die Untergruppe

$$(\operatorname{GL}_n)_{L_0} = \left\{ \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} : A \in \operatorname{GL}_k, B \in \operatorname{GL}_{n-k}, C \in \mathbb{K}^{k \times (n-k)} \right\},$$

deren Elemente man i.S.v. 1.1.9 in der Form $\varphi f' + \varphi' f$ aus dem Repräsentanten (φ, f) von L_0 mit

$$\varphi = \begin{pmatrix} E_k \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n \times k} \quad \text{und} \quad f = (0 \quad E_{n-k}) \in \mathbb{K}^{(n-k) \times n}$$

erhält (wobei jeweils E_m die $(m \times m)$ -Einheitsmatrix bezeichnet), wenn man dazu $A \in \operatorname{GL}_k$, $B \in \operatorname{GL}_{n-k}$ und $C_{1,2} \in \mathbb{K}^{k \times (n-k)}$ wählt und daraus die Matrizen

$$f' = (A \quad C_1) \in \mathbb{K}^{k \times n} \quad \text{und} \quad \varphi' = \begin{pmatrix} C_2 \\ B \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n \times (n-k)}$$

bildet. In dem unitären Vektorraum \mathbb{C}^n hat man zu $L \in \mathfrak{G}(k, \mathbb{C}^n)$ den kanonischen Komplementärraum $L^\perp \in \mathfrak{G}(n-k, \mathbb{C}^n)$, und es wirkt bereits die Gruppe $U(n) \subset \operatorname{GL}_n \mathbb{C}$ der unitären Matrizen transitiv auf $\mathfrak{G}(k, \mathbb{C}^n)$, denn man erhält $L = \operatorname{span} \{f_1, \dots, f_k\}$ für eine Orthonormalbasis (f_1, \dots, f_n) von \mathbb{C}^n , so dass $L = F(L_0)$ mit $F = (f_1 \dots f_n) \in U(n)$. Es ergibt sich

$$U(n)_{L_0} = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} : A \in U(k), B \in U(n-k) \right\} \cong U(k) \times U(n-k),$$

und daraus $\mathfrak{G}(k, \mathbb{C}^n) \cong_{U(n)} U(n)/(U(k) \times U(n-k))$.

Es soll nun noch die so genannte *Plücker-Einbettung* der Grassmannschen in einen projektiven Raum definiert werden, wobei der $\operatorname{GL} V$ -Isomorphismus 1.1.5 zwischen $\mathfrak{G}(k, V^\vee)$ und $E_k V / \operatorname{GL}_k$ zugrunde gelegt wird.

1.1.11 DEFINITION+PROPOSITION

Es sei W ein \mathbb{K} -Vektorraum. Eine r -fach multilineare Form

$$\alpha: W \times \dots \times W \longrightarrow \mathbb{K}$$

heißt alternierend, falls $\alpha(w_1, \dots, w_r) = 0$, sobald $w_i = w_j$ für ein Paar $i \neq j$. Insbesondere gilt damit bereits $\alpha(w_1, \dots, w_r) = 0$, wenn die Menge $\{w_1, \dots, w_r\}$ linear abhängig ist. Die r -fach alternierenden Multilinearformen auf W bilden einen \mathbb{K} -Vektorraum $\text{Alt}^r W$. Ist $(e_i)_{i=1 \dots m}$ eine Basis von W , so bilden die $\binom{m}{r}$ Linearformen

$$\alpha_\sigma: \alpha \mapsto \alpha(e_{\sigma_1}, \dots, e_{\sigma_r})$$

zu $\sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_r\}$ mit $1 \leq \sigma_1 < \dots < \sigma_r \leq m$ eine Basis des Dualraums $(\text{Alt}^r W)^\vee$.

Der Beweis ist elementar und findet sich z.B. in [Sat75]. Ist W' ein weiterer \mathbb{K} -Vektorraum und $\alpha \in \text{Alt}^r W$, so erhält man zu $f \in \text{Hom}(W', W)$

$$\alpha^* f := \alpha \circ (f \times \dots \times f) \in \text{Alt}^r W', \quad (1.1.12)$$

also $(\alpha^* f)(w_1, \dots, w_r) = \alpha(f(w_1), \dots, f(w_r))$ für $w_1, \dots, w_r \in W'$. Damit ist eine lineare Abbildung

$$\text{Alt}^r f: \text{Alt}^r W \longrightarrow \text{Alt}^r W', \quad \alpha \mapsto \alpha^* f,$$

mit der Eigenschaft

$$\dim_{\mathbb{K}} \text{im } f < r \iff \text{Alt}^r f = 0. \quad (1.1.13)$$

definiert. Außerdem ist klar, dass Alt^r ein kontravarianter Funktor ist: für $g \in \text{Hom}(W, W'')$ und $\alpha \in \text{Alt}^r W''$ gilt $(\alpha^* g)^* f = \alpha^*(gf)$. Wie jeder kontravariante Funktor, der die Kategorie der \mathbb{K} -Vektorräume auf sich abbildet, bildet Alt^r Mono- auf Epimorphismen und Epi- auf Monomorphismen ab, so dass insbesondere $\text{Alt}^r W \setminus \{0\}$ invariant unter der Wirkung

$$\text{GL } W \times \text{Alt}^r W \longrightarrow \text{Alt}^r W, \quad h \cdot \alpha = \alpha h^{-1},$$

ist, wodurch eine Wirkung auf dem projektiven Raum $\mathbb{P} \text{Alt}^r W$ induziert wird.

1.1.14 THEOREM

Durch die Zuordnung $\text{GL}_k(f) \mapsto [\alpha^* f]$ für ein $\alpha \in \text{Alt}^k \mathbb{K}^k$ mit $\alpha^* f \neq 0$ ist eine $\text{GL } V$ -invariante Injektion

$$\mathfrak{P}_{k,V}: \text{E}_k V / \text{GL}_k \hookrightarrow \mathbb{P} \text{Alt}^k V$$

definiert.

Beweis. Nach 1.1.13 findet man zu $f: V \rightarrow \mathbb{K}^k$ ein $\alpha \in \text{Alt}^k \mathbb{K}^k$ mit $\alpha^* f \neq 0$, und wegen $\text{Alt}^k \mathbb{K}^k \cong \mathbb{K}$ ist der Orbit $[\alpha^* f]$ unabhängig von dieser Wahl, so dass jedenfalls eine Abbildung $\text{E}_k V \rightarrow \mathbb{P} \text{Alt}^k V$ definiert ist. Diese ist konstant auf den GL_k -Orbits, denn für $g \in \text{GL}_k$ ist $\alpha^*(gf) = (\alpha^* g)^* f$ mit $\alpha^* g = c\alpha \in \text{Alt}^k \mathbb{K}^k$ für ein $c \in \mathbb{K}^*$. Die Abbildung ist also wohldefiniert und die $\text{GL } V$ -Invarianz ist klar.

Ist nun $\text{GL}_k(f) \neq \text{GL}_k(f')$ für $f, f' \in \text{E}_k V$, so ist $\ker f' \neq \ker f$ nach 1.1.4, so dass es ein $v \in \ker f'$ mit $f(v) \neq 0$ gibt. Zu $\alpha \in \text{Alt}^k \mathbb{K}^k$ mit $\alpha^* f \neq 0$ existieren $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{K}^k$ mit $(\alpha^* f)(v_1, \dots, v_k) \neq 0$. Insbesondere ist (x_1, \dots, x_k) mit $x_i := f(v_i)$ für $i = 1 \dots k$ dann eine Basis von \mathbb{K}^k , also $f(v) = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k$ mit $\lambda_i \neq 0$ für ein i , etwa $i = 1$. Es folgt $\alpha^* f(v, v_2, \dots, v_k) = \alpha(f(v), x_2, \dots, x_k) = \lambda_1 \alpha(x_1, \dots, x_k) \neq 0$, und wegen $(\alpha^* f')(v, v_2, \dots, v_k) = 0$ also $[\alpha^* f] \neq [\alpha^* f']$. \square

Speziell ist die Plücker-Einbettung 1.1.14 für $k = 1$ die identische Abbildung auf $\mathbb{P} V^\vee$, wobei $E_1 V = V^\vee \setminus \{0\} = \text{Alt}^1 V \setminus \{0\}$. Üblicherweise notiert man den Dualraum zum Vektorraum der r -fach multilinearen Formen als r -faches Tensorprodukt, d.h. es gibt eine natürliche Identifikation

$$(\text{Alt}^r W)^\vee = \bigwedge^r W$$

mit dem kovarianten Funktor $\bigwedge^r = \text{Hom}(\cdot, \mathbb{K}) \circ \text{Alt}^r$, wobei

$$\bigwedge^r W = (\bigotimes^r W) / \text{span} \{w_1 \otimes \dots \otimes w_r : w_i = w_j \text{ für ein Paar } i \neq j\}.$$

Die Erzeuger von $\bigwedge^r W$ werden mit $w_1 \wedge \dots \wedge w_r$ bezeichnet, so dass jeweils

$$w_1 \wedge \dots \wedge w_r : \alpha \mapsto \alpha(w_1, \dots, w_r),$$

als Linearform auf $\text{Alt}^r W$ aufzufassen ist. Damit erhält die Plücker-Einbettung 1.1.14 ihre klassische Form

$$\mathfrak{P}_{k,V} : \mathfrak{G}(k, V) \hookrightarrow \mathbb{P} \bigwedge^k V, \quad (1.1.15)$$

$$L = \text{span} \{v_1, \dots, v_k\} \mapsto [v_1 \wedge \dots \wedge v_k] = \bigwedge^k L,$$

deren Bild in $\mathbb{P} \bigwedge^k V$ aus allen homogenen Punkten $[\omega]$ besteht, für die $v_1, \dots, v_k \in V$ existieren, so dass $\omega = v_1 \wedge \dots \wedge v_k$.

1.1.16 BEMERKUNG

Es sei (e_1, \dots, e_n) die Standardbasis von $V = \mathbb{K}^n$ und entsprechend $E_k V$ mit der Menge $E_{k \times n} \subset \mathbb{K}^{k \times n}$ aller $(k \times n)$ -Matrizen vom Rang k und GL_k mit der Gruppe der invertierbaren Matrizen in $\mathbb{K}^{k \times k}$ identifiziert. Die Identifikation 1.1.5 bedeutet dann, dass man jede Matrix in $E_{k \times n}$ mit dem von ihren Zeilen erzeugten Unterraum im Dualraum $\mathbb{K}^{n \vee}$ assoziiert und die Multiplikation $\text{GL}_k \times E_{k \times n} \rightarrow E_{k \times n}$ als Basiswechsel interpretiert. Die Festlegung auf die Basis macht die Unterscheidung zwischen \mathbb{K}^n und $\mathbb{K}^{n \vee}$ irrelevant, d.h. man kann den Zeilenraum einer Matrix auch als Unterraum in \mathbb{K}^n auffassen. Nimmt man die Determinante $\det \in \text{Alt}^k \mathbb{K}^k \cong \mathbb{K}$ als Basis, so erhält man für eine Matrix $x \in E_{k \times n}$ in der Notation 1.1.12 für $1 \leq \sigma_1 < \dots < \sigma_k \leq n$ jeweils

$$(\det^* x)(e_{\sigma_1}, \dots, e_{\sigma_k}) = \det(xe_{\sigma_1}, \dots, xe_{\sigma_k}).$$

Die $\binom{n}{k}$ Koeffizienten des Bildes von $L = (\ker x)^\perp = \text{im } {}^t x \in \mathfrak{G}(k, \mathbb{K}^n)$ bzgl. der durch die Basis $(e_i)_i$ induzierten Standardbasis von $\bigwedge^k \mathbb{K}^n$ sind die k -Minoren von x , so dass die in Koordinaten geschriebene Plücker-Einbettung durch die Abbildung

$$\bigwedge_{k \times n} : \mathbb{K}^{k \times n} \longrightarrow \mathbb{K}^{\binom{n}{k}}, \quad ((k \times n)\text{-Matrix}) \mapsto (k\text{-Minoren}), \quad (1.1.17)$$

auf $E_{k \times n}$ induziert wird.

1.2 Die Grassmannsche Varietät

Es soll nun die Grassmannsche 1.1.1 als Varietät im Sinne der algebraischen Geometrie, also im weiteren Sinne als Nullstellenmenge von Polynomen, dargestellt werden. Grundlage für die verwendeten Begriffe ist im Wesentlichen [Har77], und alle topologischen Begriffe beziehen sich auf die Zariski-Topologie.

Es sei hier wie in 1.1.16 eine Basis $(e_i)_{i=1\dots n}$ von $V = K^n$ fixiert, und es bezeichne $E_{k \times n} \subset K^{k \times n}$ die Menge aller $(k \times n)$ -Matrizen vom Rang k über K . Ausgangspunkt ist der in 1.1 beschriebene Isomorphismus

$$\mathfrak{G}(k, n) := \mathfrak{G}(k, K^{n \vee}) \xleftarrow{\cong_{\mathrm{GL}_n}} E_{k \times n} / \mathrm{GL}_k ,$$

d.h. die Elemente aus $\mathfrak{G}(k, n)$ werden als Zeilenräume von Matrizen modulo Links-Multiplikation mit invertierbaren Matrizen aufgefasst.

Aus Sicht der algebraischen Geometrie bilden die Punkte der Menge $K^{k \times n}$ die maximalen Ideale im Polynomring

$$K[\mathbf{t}] := K[t_{i,j} : i = 1 \dots k, j = 1 \dots n],$$

dem Koordinatenring des affinen Schemas $\mathbb{A}^{k \times n} = \mathrm{Spec} K[\mathbf{t}]$. Zu jedem Multi-Index $\sigma = \{\sigma_1 < \dots < \sigma_k\} \in \binom{n}{k}$ gibt es eine Einbettung

$$K[\mathbf{x}] := K[x_{i,j} : i, j = 1 \dots k] \hookrightarrow K[\mathbf{t}] , \quad x_{i,j} \mapsto t_{i,\sigma_j},$$

von Ringen, den Komorphismus zu der Projektion $(\cdot)_\sigma : \mathbb{A}^{k \times n} \rightarrow \mathbb{A}^{k \times k}$, die jede Matrix x auf die $(k \times k)$ -Untermatrix x_σ abbildet, die aus den durch σ indizierten Spalten besteht. Die Determinante ist ein vom Grad k homogenes Polynom in $K[\mathbf{x}]$, und für $\sigma \in \binom{n}{k}$ ist

$$\det_\sigma := \det \circ (\cdot)_\sigma \in K[\mathbf{t}]$$

der durch σ indizierte k -Minor. Da eine $(k \times n)$ -Matrix genau dann vom Rang k ist, wenn mindestens einer ihrer k -Minoren nicht verschwindet, erhält man

$$E_{k \times n} = \bigcup_{\sigma} D(\det_\sigma) \subset \mathbb{A}^{k \times n},$$

als offene Teilmenge, wobei wie üblich $D(f)$ die offene Menge aller Nicht-Nullstellen einer regulären Funktion f bezeichnet, d.h. $D(f)$ ist das affine Schema $\mathrm{Spec} K[\mathbf{t}]_f$, über der Lokalisierung $K[\mathbf{t}]_f$. Es ist also $\mathrm{GL}_k = D(\det) \subset \mathbb{A}^{k \times k}$ und jeweils $D(\det_\sigma) = (\cdot)_\sigma^{-1}(\mathrm{GL}_k)$. Die Gruppenoperationen auf GL_k sind, ebenso wie die Multiplikation $\mathrm{GL}_k \times \mathbb{A}^{k \times n} \rightarrow \mathbb{A}^{k \times n}$, regulär, d.h. GL_k wirkt als algebraische Gruppe¹ auf $\mathbb{A}^{k \times n}$ und läßt dabei $E_{k \times n}$ invariant. Da die Projektion $(\cdot)_\sigma$ auf die σ -Untermatrix jeweils ein GL_k -Morphismus ist, läßt GL_k sogar die Mengen $D(\det_\sigma)$ invariant. Man erhält zu jeder der induzierten Wirkungen ein Repräsentantensystem

$$D(\det_\sigma) / \mathrm{GL}_k \hookrightarrow D(\det_\sigma) , \quad \mathrm{GL}_k(x) \mapsto \pi_\sigma(x) := x_\sigma^{-1} x. \quad (1.2.1)$$

Die Inklusion ist zwar zunächst nur eine Funktion von Mengen, jedoch ist jeweils die Projektion

$$\pi_\sigma : D(\det_\sigma) \twoheadrightarrow X_\sigma := (\cdot)_\sigma^{-1}(\{1_{\mathrm{GL}_k}\}) \cong \mathbb{A}^{k(n-k)}$$

auf die Repräsentanten eine reguläre Funktion. Man erhält also jeweils eine lokale Plücker-Einbettung

$$\wedge_{k \times n}(\sigma) := \wedge_{k \times n} \upharpoonright_{X_\sigma} : X_\sigma \hookrightarrow U_\sigma \cong \mathbb{A}^{\binom{n}{k}-1} \quad (1.2.2)$$

¹Zu algebraischen Gruppen und ihren Wirkungen auf Varietäten s. [Hum75].

für $\sigma \in \binom{n}{k}$ (vgl. 1.1.17) als Inklusion affiner Schemata, wobei $\{U_\sigma\}_\sigma$ die übliche offene Überdeckung des projektiven Raums $\mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1} = \text{Proj } \mathbb{K}[\mathbf{p}]$ mit

$$\mathbb{K}[\mathbf{p}] := \mathbb{K}[p_\sigma : \sigma \in \binom{n}{k}]$$

bildet, d.h. U_σ ist das affine Schema $(\text{Spec } \mathbb{K}[\mathbf{p}])_{p_\sigma} = \text{Spec } \mathbb{K}[\mathbf{p}][p_\sigma^{-1}]_0$, wobei $\mathbb{K}[\mathbf{p}][p_\sigma^{-1}]_0 \cong \mathbb{K}[\mathbf{p}]/\langle p_\sigma - 1 \rangle$ den Unterring der Elemente vom Grad 0 in der graduerten Lokalisierung bezeichnet.

Es soll nun die Grassmannsche $\mathfrak{G}(k, n)$ als projektives Schema, versehen mit einer Einbettung in $\mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1}$, durch *Verklebung* der Familie $\{X_\sigma\}_\sigma$ realisiert werden. Die allgemeine Vorgehensweise wird hier zitiert (vgl. z.B. [Sha94], V.3.2):

1.2.3 LEMMA

Gegeben sei eine Familie $\{X_i\}_i$ von Schemata und für alle $i \neq j$ ein offenes Unterschema $U_{ij} \subset X_i$ mit Isomorphismen $\varphi_{ij}: U_{ij} \rightarrow U_{ji}$, so dass

- (1) $\varphi_{ji} = \varphi_{ij}^{-1}$ für alle i, j und
- (2) $\varphi_{ij}(U_{ij} \cap U_{ik}) = U_{ji} \cap U_{jk}$ für alle i, j, k , und für die Restriktionen auf $U_{ij} \cap U_{ik}$ gilt $\varphi_{ik} = \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij}$.

Dann existiert ein Schema X (die Verklebung der X_i entlang der φ_{ij}) zusammen mit einer offenen Überdeckung $\{V_i\}_i$ und Isomorphismen $\psi_i: X_i \rightarrow V_i$ für alle i , so dass für alle $i \neq j$

- (i) $\psi_i(U_{ij}) = V_i \cap V_j$ und
- (ii) $\psi_i = \psi_j \circ \varphi_{ij}$ auf U_{ij} .

1.2.4 THEOREM

Es gibt ein Schema $\mathfrak{G}(k, n) \hookrightarrow \mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1}$ mit einer Projektion $\pi: \mathbb{E}_{k \times n} \rightarrow \mathfrak{G}(k, n)$, dessen abgeschlossene Punkte den GL_k -Orbits entsprechen, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}_{k \times n} & \xrightarrow{\wedge_{k \times n}} & \mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1} \\ & \searrow \pi & \nearrow \mathfrak{P}_{k, n} \\ & \mathfrak{G}(k, n) & \end{array}$$

Beweis. $\mathfrak{G}(k, n)$ wird als disjunkte Vereinigung der affinen Schemata X_σ unter Identifikation von Punkten im selben GL_k -Orbit gebildet. Für die Matrizen $x \in D(\det_\sigma) \cap D(\det_\tau)$ gilt wegen der GL_k -Invarianz der Projektion $(\cdot)_\tau$

$$(\pi_\tau \circ \pi_\sigma)(x) = (x_\sigma^{-1} x)_\tau^{-1} x_\sigma^{-1} x = x_\tau^{-1} x = \pi_\tau(x), \quad (*)$$

also $\pi_\tau \circ \pi_\sigma = \pi_\tau$ auf $D(\det_\sigma) \cap D(\det_\tau)$. Man erhält für $\sigma \neq \tau$ jeweils ein offenes Unterschema $U_{\sigma, \tau} := X_\sigma \cap D(\det_\tau)$ in X_σ mit Isomorphismen

$$\varphi_{\sigma, \tau} := \pi_\tau \upharpoonright_{U_{\sigma, \tau}}: U_{\sigma, \tau} \xrightarrow{\cong} U_{\tau, \sigma},$$

wobei $\varphi_{\sigma, \tau} \circ \varphi_{\tau, \sigma} = \pi_\sigma \upharpoonright_{X_\sigma} = \text{id}$. Wegen der GL_k -Invarianz von $D(\det_\zeta)$ gilt für $x \in X_\tau \cap D(\det_\sigma) \cap D(\det_\zeta)$ immer $\varphi_{\tau, \sigma}(x) = x_\sigma^{-1} x \in D(\det_\zeta)$, also jeweils $\varphi_{\sigma, \tau}(U_{\sigma, \tau} \cap U_{\sigma, \zeta}) = U_{\tau, \sigma} \cap U_{\tau, \zeta}$ und nach (*) auch $\varphi_{\sigma, \zeta} = \varphi_{\tau, \zeta} \circ \varphi_{\sigma, \tau}$ auf $U_{\sigma, \tau} \cap U_{\sigma, \zeta}$.

Das Ergebnis der Verklebung der X_σ entlang der $\varphi_{\sigma,\tau}$ ist nach 1.2.3 ein Schema $\mathfrak{G}(k, n)$, versehen mit einer offenen Überdeckung $\{V_\sigma\}$ und Inklusionen $\psi_\sigma: X_\sigma \hookrightarrow \mathfrak{G}(k, n)$ mit $\psi_\sigma(X_\sigma) = V_\sigma$ und $\psi_\sigma = \psi_\tau \circ \varphi_{\sigma,\tau}$ auf $U_{\sigma,\tau}$. Dies ist das Bild der Projektion $\pi: \mathbb{E}_{k \times n} \rightarrow \mathfrak{G}(k, n)$, die sich lokal aus den Kompositionen $\psi_\sigma \circ \pi_\sigma$ zusammensetzt, denn wegen $\pi_\sigma(D(\det_\sigma) \cap D(\det_\tau)) \subset U_{\sigma,\tau}$ folgt aus (*) jeweils

$$\psi_\sigma \circ \pi_\sigma = (\psi_\tau \circ \varphi_{\sigma,\tau}) \circ \pi_\sigma = \psi_\tau \circ (\pi_\tau \circ \pi_\sigma) = \psi_\tau \circ \pi_\tau$$

auf $D(\det_\sigma) \cap D(\det_\tau)$. Auf der anderen Seite ist klar, dass die $\varphi_{\sigma,\tau}$ unter den lokalen Einbettungen $\wedge_{k \times n}(\sigma): X_\sigma \hookrightarrow U_\sigma$ jeweils den Übergängen

$$\text{Spec } \mathbb{K}[\mathbf{p}][p_\sigma^{-1}]_0[(p_\tau/p_\sigma)^{-1}] \longrightarrow \text{Spec } \mathbb{K}[\mathbf{p}][p_\tau^{-1}]_0[(p_\sigma/p_\tau)^{-1}]$$

auf $U_\sigma \cap U_\tau$ entsprechen, d.h. die jeweiligen Restriktionen bilden ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} V_\sigma \cap V_\tau & \xleftarrow{\psi_\sigma} & U_{\sigma,\tau} & \xrightarrow{\wedge_{k \times n}(\sigma)} & U_\sigma \cap U_\tau \\ & \searrow \psi_\tau & \downarrow \varphi_{\sigma,\tau} & \nearrow \wedge_{k \times n}(\tau) & \\ & & U_{\tau,\sigma} & & \end{array}$$

Die Injektionen $\wedge_{k \times n}(\sigma) \circ \psi_\sigma^{-1}$ setzen sich damit zur Plücker-Einbettung $\mathfrak{P}_{k,n}$ als Inklusion projektiver Schemata zusammen. \square

1.2.5 KOROLLAR

$\mathfrak{G}(k, n)$ ist eine $k(n - k)$ -dimensionale projektive Varietät.

1.2.6 BEMERKUNG

Eine naheliegende Verallgemeinerung des tautologischen Bündels $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(1)$ auf $\mathbb{P}^{n-1} = \mathfrak{G}_{1,n}$ ist das Unterbündel $\mathcal{E}_{k,n}$ des trivialen Bündels $\mathfrak{G}(k, n) \times \mathbb{A}^n \rightarrow \mathfrak{G}(k, n)$ mit

$$\mathcal{E}_{k,n} := \{(L, v) \in \mathfrak{G}(k, n) \times \mathbb{A}^n : v \in L\},$$

d.h. die Faser über dem Punkt $L \in \mathfrak{G}(k, n)$ ist der Vektorraum L . Für $x \in X_\sigma$, also $x_\sigma = 1_{\text{GL}_k}$, erhält man einen Zeilenvektor $v = (v_1, \dots, v_n) \in L_x := \text{GL}_k(x)$ als $(1 \times n)$ -Matrix $v = v_\sigma x$, wobei $(\cdot)_\sigma: \mathbb{K}^{1 \times n} \rightarrow \mathbb{K}^{1 \times k}$ hier die Projektion auf die durch σ indizierten Einträge bezeichnet. Aus dem Repräsentantensystem 1.2.1 resultiert damit die Darstellung

$$\mathcal{E}_{k,n} \upharpoonright_{V_\sigma} = \{(L_x, v) : x_\sigma \in \text{GL}_k, v = v_\sigma x_\sigma^{-1} x\},$$

wobei die affinen Schemata $V_\sigma \cong \mathbb{A}^{k(n-k)}$ die offene Überdeckung von $\mathfrak{G}(k, n)$ aus 1.2.4 bilden. $\mathcal{E}_{k,n}$ ist also ein Vektorbündel vom Rang k mit lokalen Trivialisierungen

$$\varphi_\sigma: \mathcal{E}_{k,n} \upharpoonright_{V_\sigma} \longrightarrow V_\sigma \times \mathbb{K}^k, (L_x, w x_\sigma^{-1} x) \longmapsto (L_x, w),$$

wobei $w = (w x_\sigma^{-1} x)_\sigma$. Wegen $(w x_\sigma^{-1} x)_\tau = w(x_\sigma^{-1} x)_\tau = w x_\sigma^{-1} x_\tau$ sind die Übergänge $\varphi_{\sigma,\tau}: (V_\sigma \cap V_\tau) \times \mathbb{K}^k \rightarrow (V_\sigma \cap V_\tau) \times \mathbb{K}^k$ zu $\sigma, \tau \in \binom{n}{k}$ durch

$$\varphi_{\sigma,\tau}(L_x, w) = \varphi_\tau \circ \varphi_\sigma^{-1}(L_x, w) = \varphi_\tau(L_x, w x_\sigma^{-1} x) = (L_x, w x_\sigma^{-1} x_\tau)$$

gegeben. Man erhält also

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{G}(k,n)}(1) = \wedge^k \mathcal{E}_{k,n} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1}}(1) \upharpoonright_{\mathfrak{G}(k,n)}.$$

Es wird nun noch gezeigt, dass $\mathfrak{G}(k, n)$ als Bild der rationalen Abbildung

$$\wedge_{k \times n}: \mathbb{A}^{k \times n} \dashrightarrow \mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1} \quad (1.2.7)$$

abgeschlossen ist, d.h. dass sich die Menge der abgeschlossenen Punkte von $\mathfrak{G}(k, n)$ als homogene Nullstellenmenge innerhalb von $\mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1}$ herausstellt.

1.2.8 THEOREM

Die Plücker-Einbettung $\mathfrak{P}_{k,n}$ ist eine abgeschlossene Einbettung.

Beweis. Mit den bisherigen Ausführungen genügt es zu zeigen, dass jeweils das Bild der lokalen Inklusion

$$\wedge_{k \times n}(\sigma): X_\sigma \hookrightarrow U_\sigma$$

(s. 1.2.2) abgeschlossen in $U_\sigma \cong \mathbb{A}^{\binom{n}{k}-1}$ ist. Für $x \in X_\sigma$ kann man jede durch ein $\tau \neq \sigma$ indizierte $(k \times k)$ -Untermatrix nach den Zeilen der durch $\sigma \cap \tau$ indizierten Spalten entwickeln (Laplace-Entwicklung), wodurch man, wegen $x_\sigma = 1 \in \mathbb{GL}_k$, die zu σ gehörigen Spalten und Zeilen eliminiert und bis auf Vorzeichen einen Minor der Größe $k - |\sigma \cap \tau|$ in der $(k \times (n - k))$ -Untermatrix x' erhält, die aus den durch $\{1, \dots, n\} \setminus \sigma$ indizierten Spalten besteht. Die durch $\tau \neq \sigma$ indizierten k -Minoren von x sind also bis auf Vorzeichen die

$$\sum_{r=1}^{\min\{k, n-k\}} \binom{k}{r} \binom{n-k}{r} = \binom{n}{k} - 1$$

Minoren aller Größen $r = 1 \dots \min\{k, n - k\}$ von x' . Die aus der Entwicklung resultierenden Relationen zwischen diesen Minoren erzeugen ein Ideal im Koordinatenring $\mathbb{K}[\mathbf{p}]/\langle p_\sigma - 1 \rangle$ von U_σ , und jede Nullstelle über diesem Ideal liefert mit den 1-Minoren auch die zugehörige Matrix. \square

Der generische Punkt von $\mathfrak{G}(k, n)$ ist der Kern des Komorphismus

$$\wedge_{k \times n}^*: \mathbb{K}[\mathbf{p}] \longrightarrow \mathbb{K}[\mathbf{t}], \quad p_\sigma \longmapsto \det_\sigma, \quad (1.2.9)$$

zum Morphismus 1.2.7.

1.2.10 DEFINITION

Das homogene Primideal $\mathfrak{J}_{k,n} := \ker \wedge_{k \times n}^*$ heißt Plücker-Ideal.

1.2.11 BEISPIEL

Für $k = 1$ oder $k = n - 1$ ist jeweils $k(n - k) = \binom{n}{k} - 1 = n - 1$, und die lokalen Einbettungen $\wedge_{k \times n}(\sigma)$ sind Isomorphismen $X_\sigma \cong \mathbb{A}^{n-1}$. Der einfachste nichttriviale Fall ist $k = 2$ und $n = 4$. Man erhält z.B. für $\sigma = \{1, 2\}$ die lokale Einbettung

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 1 & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix} \xrightarrow{\wedge_{2,4}(\{1,2\})} (a_{23}, a_{24}, -a_{13}, -a_{14}, a_{13}a_{24} - a_{14}a_{23}),$$

deren Bild in \mathbb{A}^5 durch die Gleichung $z_5 = z_1z_4 - z_2z_3$ charakterisiert ist. Notiert man $\sigma = \{\sigma_1 < \sigma_2\}$ mit $\sigma_1\sigma_2$, so ergibt Umbenennung und Homogenisierung bei $p_{12} \in \mathbb{K}[\mathbf{p}] = \mathbb{K}[p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{24}, p_{34}]$:

$$\mathfrak{J}_{2,4} = \langle p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23} \rangle. \quad (1.2.12)$$

Der Erzeuger ist das Pfaff'sche Polynom P_4 (s. [Sat75], II.1.3), dessen Quadrat die Determinante der alternierenden 4×4 -Matrix

$$A_4 := \begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ -p_{12} & 0 & p_{23} & p_{24} \\ -p_{13} & -p_{23} & 0 & p_{34} \\ -p_{14} & -p_{24} & -p_{34} & 0 \end{pmatrix}$$

bildet. Die nicht verschwindenden 3-Minoren in A_4 sind alle von der Form $\pm p_{ij}P_4$, und alle p_{ij}^2 für $1 \leq i < j \leq 4$ treten als ein 2-Minor in A_4 auf, so dass der Rang der Matrix $A_4(\mathbf{z}) \in \mathbb{K}^{4 \times 4}$, $\mathbf{z} = (z_{12}, z_{13}, z_{14}, z_{23}, z_{24}, z_{34})$, stets entweder 2 oder 4 beträgt, sofern ein z_{ij} von Null verschieden ist. Ist $[\mathbf{z}]$ eine homogene Nullstelle von P_4 , so ist das Bild des durch $A_4(\mathbf{z})$ beschriebenen Endomorphismus der Unterraum $L_{\mathbf{z}} \in \mathfrak{G}_{2,4}$, der unter der Plücker-Einbettung auf $[\mathbf{z}]$ abgebildet wird. Ist nämlich $z_{ij} = a_{1i}a_{2j} - a_{1j}a_{2i}$ für $1 \leq i < j \leq 4$, so berechnet man jeweils

$$A_4(\mathbf{z}) \cdot (a_{\nu i}e_j - a_{\nu j}e_i) = z_{ij} {}^t(a_{\nu 1}, a_{\nu 2}, a_{\nu 3}, a_{\nu 4})$$

für $\nu = 1, 2$, d.h. nach Wahl eines $z_{ij} \neq 0$ lassen sich die Erzeuger von $L_{\mathbf{z}}$ aus den Spalten von $A_4(\mathbf{z})$ linear kombinieren.

1.2.13 BEMERKUNG

Die affinen Karten $V_\sigma = U_\sigma \cap \mathfrak{G}(k, n)$ der offenen Überdeckung von $\mathfrak{G}(k, n)$ lassen sich unter der in 1.1 begründeten Identifikation der Unterraummenge $\mathfrak{G}(k, n)$ mit dem Bild der Plücker-Einbettung im projektiven Raum auch explizit als Mengen von Unterräumen beschreiben: Die Projektion $(\cdot)_\sigma$ entspricht im Sinne der Identifikation $\mathbb{A}^{k \times n} = \mathbb{K}^{k \times n} = \text{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^k)$ jeweils der Restriktionsabbildung bzgl. der Einbettung $\mathbb{K}^k \cong L_\sigma := \text{span}\{e_i : i \in \sigma\} \subset \mathbb{K}^n$. Die Unterräume $L \in V_\sigma$ entsprechen also im Sinne von 1.1 den Epimorphismen $f \in E_{k \times n}$ mit $\ker f \cap L_\sigma = 0$, so dass

$$V_\sigma = \left\{ L \in \mathfrak{G}(k, n) : L \oplus L_\sigma^\perp = \mathbb{K}^{n \vee} \right\}.$$

1.3 Die Grassmannsche unter Torus-Wirkung

In diesem Abschnitt wird nocheinmal auf die Grassmannsche $\mathfrak{G}(k, n)$ als GL_n -Modul Bezug genommen. Genauer wird, insbesondere um den Begriff einer *Torischen Varietät* i.S.v. [Ful93] und die damit zusammenhängende Terminologie zur späteren Referenzierung definiert zu haben, die Wirkung des n -dimensionalen Torus

$$\mathbb{T}^n := (\mathbb{K}^*)^n \subset \text{GL}_n$$

als Untergruppe der invertierbaren Diagonalmatrizen auf $\mathfrak{G}(k, n)$ untersucht, die, im Gegensatz zur GL_n -Wirkung, nicht transitiv ist.

Es wurde gezeigt, dass GL_n auf $\mathfrak{G}(k, n)$ als Unterraummenge mit $L \mapsto h(L)$ operiert, und dass diese Wirkung durch Rechtsmultiplikation von $(k \times n)$ -Matrizen mit Elementen aus GL_n induziert wird (s. 1.1.7, S.6). Bezeichnet man mit \mathbf{t}_σ zu $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{T}^n$ und $\sigma \in \binom{n}{k}$ die Untermatrix $(t_i)_{i \in \sigma} \in \mathbb{T}^k$, so ist $(x \cdot \mathbf{t})_\sigma = x_\sigma \cdot \mathbf{t}_\sigma$ für $x \in E_{k,n}$, also $\det(x \cdot \mathbf{t})_\sigma = \left(\prod_{i \in \sigma} t_i\right) \det x_\sigma$. Die durch die Plücker-Einbettung induzierte \mathbb{T}^n -Wirkung auf $\mathfrak{G}(k, n) \subset \mathbb{P} \wedge^k \mathbb{K}^n$ ist daher die auf dem

projektiven Raum durch $v_1 \wedge \dots \wedge v_k \mapsto \mathbf{t}v_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{t}v_k$ induzierte Wirkung, die bzgl. der fixierten Basis die Darstellung

$$(t_1, \dots, t_n) \cdot [\omega_\sigma]_\sigma = [(\prod_{i \in \sigma}^k t_i) \omega_\sigma]_\sigma \quad (1.3.1)$$

für $(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{T}^n$ und $[\omega_\sigma]_\sigma \in \mathbb{P} \wedge^k \mathbb{K}^n = \mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1}$ hat. Man erhält \mathbb{T}^n als algebraischen Torus¹ in $\mathrm{GL}(\wedge^k \mathbb{K}^n)$, und die in der Wirkung 1.3.1 auftretenden regulären Gruppenhomomorphismen $\chi_\sigma: (t_1, \dots, t_n) \mapsto \prod_{i \in \sigma} t_i$ werden als Elemente der Charaktergruppe von \mathbb{T}^n die *Gewichte* der Toruswirkung genannt.

Die $2^{\binom{n}{k}} - 1$ Orbits der natürlichen Wirkung des Torus $\mathbb{T}^{\binom{n}{k}-1} = \mathbb{T}^{\binom{n}{k}}/\mathbb{K}^*$ auf $\mathbb{P} \wedge^k \mathbb{K}^n$ sind invariant unter der Wirkung 1.3.1, woraus eine Zerlegung

$$(\mathbb{P} \wedge^k \mathbb{K}^n)/\mathbb{T}^n = \coprod_S ((\mathbb{T}^S/\mathbb{K}^*)/\mathbb{T}^n),$$

indiziert durch die nichtleeren Teilmengen $S \subset \binom{n}{k}$, resultiert. Für eine $(k \times n)$ -Matrix $x \in E_{k,n}$ sei

$$\mathrm{supp} x := \{ \sigma \in \binom{n}{k} : \det x_\sigma \neq 0 \}$$

der *Support* von x , wobei x_σ wie in 1.2 die durch σ indizierte $(k \times k)$ -Untermatrix von x bezeichnet. Wegen $(g \cdot x)_\sigma = g \cdot x_\sigma$ für $g \in \mathrm{GL}_k$ ist der Support, abhängig von der gewählten Basis, eine Invariante des Unterraums $L = \mathrm{GL}_k(x) \in \mathfrak{G}(k, n)$, so dass $\mathrm{supp} L$ definiert ist. Die Plücker-Einbettung macht somit zu jeder Teilmenge $S \subset \binom{n}{k}$ die Menge aller Unterräume L mit $\mathrm{supp} L = S$ zu einer \mathbb{T}^n -invarianten Teilmenge des Torus $\mathbb{T}^S/\mathbb{K}^*$.

Der Quotient $\mathfrak{G}(k, n)/\mathbb{T}^n$ zerfällt also in gewisse Klassen $\mathfrak{G}(k, n)_S/\mathbb{T}^n$ zu $S \subset \binom{n}{k}$ mit $\mathfrak{G}(k, n)_S := \{L \in \mathfrak{G}(k, n) : \mathrm{supp} L = S\} \neq \emptyset$.

1.3.2 PROPOSITION

Die Plücker-Einbettung induziert zu jeder Teilmenge $S \subset \binom{n}{k}$ mit $\mathfrak{G}(k, n)_S \neq \emptyset$ eine Einbettung

$$\mathfrak{G}(k, n)_S/\mathbb{T}^n \hookrightarrow (\mathbb{T}^S/\mathbb{K}^*)/\mathbb{T}^n$$

des Quotienten der \mathbb{T}^n -Wirkung als Teilmenge einer abelschen Gruppe.

Beweis. Die \mathbb{T}^n -Wirkung ist für jede Teilmenge $\emptyset \neq S \subset \binom{n}{k}$ mit der Struktur der abelschen Gruppe $\mathbb{T}^S/\mathbb{K}^*$ verträglich, in dem Sinne, dass für $\mathbf{t} \in \mathbb{T}^n$ und $[\omega], [\omega'] \in \mathbb{T}^S/\mathbb{K}^*$ immer $(\mathbf{t} \cdot [\omega]) \cdot [\omega'] = \mathbf{t} \cdot ([\omega] \cdot [\omega'])$ gilt. Daraus folgt, dass der Orbit $\mathbb{T}^n([\mathbf{1}]_S)$ über dem neutralen Element $[\mathbf{1}]_S$ in $\mathbb{T}^S/\mathbb{K}^*$ eine Untergruppe in $\mathbb{T}^S/\mathbb{K}^*$ bildet und der Quotient $(\mathbb{T}^S/\mathbb{K}^*)/\mathbb{T}^n$ als Menge mit der Quotientengruppe $(\mathbb{T}^S/\mathbb{K}^*)/\mathbb{T}^n([\mathbf{1}]_S)$ übereinstimmt, denn wegen $\mathbf{t} \cdot [\omega] = \mathbf{t} \cdot ([\mathbf{1}]_S \cdot [\omega]) = (\mathbf{t} \cdot [\mathbf{1}]_S) \cdot [\omega]$ erhält man den Orbit $\mathbb{T}^n([\omega])$ als Nebenklasse $\mathbb{T}^n([\mathbf{1}]_S)[\omega]$. \square

Der \mathbb{T}^n -Orbit $\mathbb{T}^n([\mathbf{1}])$ für $S = \binom{n}{k}$ wird der *generische \mathbb{T}^n -Orbit* über der Grassmannschen genannt. Bildet man aus den Gewichten χ_σ der \mathbb{T}^n -Wirkung den homogenen \mathbb{K} -Algebra-Homomorphismus

$$\mathbb{K}[\mathbf{p}] = \mathbb{K}[p_\sigma : \sigma \in \binom{n}{k}] \longrightarrow \mathbb{K}[t_1, \dots, t_n], \quad p_\sigma \mapsto \prod_{i \in \sigma} t_i, \quad (1.3.3)$$

¹Eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(W)$ wird *algebraisch* genannt, wenn sie in der Zariski-Topologie von $\mathrm{GL}(W)$ abgeschlossen ist. Es ist klar, dass \mathbb{T}^n außerdem einen *algebraischen Torus* in $\mathrm{GL}(\wedge^k \mathbb{K}^n)$ bildet, also aus halbeinfachen Elementen besteht (s. [Hum75]).

so stimmt der Zariski-Abschluss $\overline{\mathbb{T}^n([\mathbf{1}])}$ über dem generischen Orbit in $\mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1}$ mit dem Abschluss über dem Bild der zugehörigen rationalen Abbildung überein. Außerdem ist klar, dass der durch $\mathbf{t} \mapsto \mathbf{t} \cdot [\mathbf{1}] = [\chi_\sigma(\mathbf{t})]_\sigma$ gegebene reguläre Epimorphismus $\mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n([\mathbf{1}])$ von algebraischen Gruppen modulo \mathbb{K}^* injektiv ist, denn aus $[\omega_\sigma]_\sigma \in \mathbb{T}^n([\mathbf{1}])$ lassen sich die Zahlen t_i/t_1 für (t_1, \dots, t_n) mit $\omega_\sigma = \chi_\sigma(t_1, \dots, t_n)$ für $\sigma \in \binom{n}{k}$ in eindeutiger Weise rekonstruieren. Der Orbit-Abschluss $\overline{\mathbb{T}^n([\mathbf{1}])}$ ist daher eine $(n-1)$ -dimensionale projektive Varietät, die den Torus $\mathbb{T}^n/\mathbb{K}^*$ als dichte offene Teilmenge enthält.

1.3.4 DEFINITION+PROPOSITION

Es sei $d > 0$ eine natürliche Zahl. Eine Torische Varietät zum Torus $\mathbb{T}^d = (\mathbb{K}^*)^d$ ist eine normale Varietät X , zusammen mit einer Einbettung $\mathbb{T}^d \hookrightarrow X$ als dichte offene Teilmenge, so dass die natürliche Wirkung von \mathbb{T}^d auf sich selbst sich zu einer Wirkung $\mathbb{T}^d \times X \rightarrow X$ erweitert.

Jede torische Varietät läßt sich auf die aus den folgenden Aussagen hervorgehende Weise konstruieren.

- (i) Die regulären Gruppenhomomorphismen $\mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{K}^*$ bilden die Charaktergruppe M von \mathbb{T}^d . Dies ist eine freie abelsche Gruppe vom Rang d , deren Elemente als Monome $\chi_1^{a_1} \cdots \chi_d^{a_d}: \mathbf{t} = (t_1, \dots, t_d) \mapsto \mathbf{t}^{\mathbf{a}} = t_1^{a_1} \cdots t_d^{a_d}$ zu $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{Z}^d$ geschrieben werden. Sie erzeugen den Koordinatenring $\mathbb{K}[M] = \mathbb{K}[\chi_1, \chi_1^{-1}, \dots, \chi_d, \chi_d^{-1}]$ von \mathbb{T}^d als \mathbb{K} -Vektorraum.
- (ii) Die regulären Gruppenhomomorphismen $\mathbb{K}^* \rightarrow \mathbb{T}^d$ (1-psg's) bilden eine freie abelsche Gruppe $N \cong \mathbb{Z}^d$, sind also von der Form $\lambda^{\mathbf{u}} = \lambda_1^{u_1} \cdots \lambda_d^{u_d}: t \mapsto (t^{u_1}, \dots, t^{u_d})$ für $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_d) \in \mathbb{Z}^d$. Es ist $N = \text{Hom}(M, \mathbb{Z})$ entsprechend der perfekten Paarung $\langle \cdot, \cdot \rangle: M \times N \rightarrow \mathbb{Z}$ mit $\chi \circ \lambda(t) = t^{\langle \chi, \lambda \rangle}$ für alle $t \in \mathbb{K}^*$, also $\langle \mathbf{u}, \mathbf{a} \rangle = u_1 a_1 + \dots + u_d a_d$ für $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_d), \mathbf{a} = (a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{Z}^d$.
- (iii) Mit "Kegel" wird hier immer ein strikt konvexer rationaler polyedrischer Kegel bezeichnet, das ist eine Menge der Form

$$\begin{aligned} \sigma &= \text{pos}(\{u_1, \dots, u_r\}) \\ &:= \{\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_r u_r: \lambda_1, \dots, \lambda_r \geq 0\} \subset N_{\mathbb{R}} := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \end{aligned}$$

mit $u_1, \dots, u_r \in N$, die $\sigma \cap -\sigma = \{0\}$ erfüllt. Die Dimension eines Kegels σ ist die Dimension des kleinsten \mathbb{R} -Vektorraums in $N_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^d$, der σ enthält. Die Seiten eines Kegels σ sind die Mengen der Form $\ker \varphi \cap \sigma$, wobei φ eine auf σ nichtnegative Linearform bezeichnet.

- (iv) Der zu σ duale Kegel ist $\sigma^\vee \subset M_{\mathbb{R}} := M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ mit

$$\sigma^\vee := \{m \in M_{\mathbb{R}}: \langle m, u \rangle \geq 0 \ \forall u \in \sigma\}.$$

σ^\vee ist ebenfalls strikt konvex und rational und $\sigma^\vee \cap M$ eine endlich erzeugte Halbgruppe in M . Das affine Schema $X_\sigma := \text{Spec } \mathbb{K}[\sigma^\vee \cap M]$ ist eine Torische Varietät zu \mathbb{T}^d .

(v) Ein Fächer Σ ist eine endliche Menge von Kegeln σ , so dass für $\sigma \in \Sigma$ auch $\tau \in \Sigma$ für alle Seiten τ von σ gilt und für $\sigma, \tau \in \Sigma$ stets $\sigma \cap \tau$ eine gemeinsame Seite von σ und τ ist. Man erhält eine Torische Varietät X_Σ zu \mathbb{T}^d durch Verkleben der Torischen Varietäten X_σ zu den Kegeln $\sigma \in \Sigma$ entlang der offenen Teilmengen $X_{\sigma \cap \tau}$.

Ist beispielsweise eine Basis $\{e_1, \dots, e_d\}$ von $N = \mathbb{Z}^d$ gegeben und setzt man $e_0 := -e_1 - \dots - e_d$, so bilden die von den echten Teilmengen in $\{e_0, \dots, e_d\}$ erzeugten Kegel einen Fächer, aus dem der projektive Raum \mathbb{P}^d als Torische Varietät zum Torus \mathbb{T}^d resultiert, der sich mit $(t_1, \dots, t_d) \mapsto [t_1 : \dots : t_d : 1]$ als dichte offene Teilmenge einbetten läßt.

Die Charaktere χ_σ bilden als Elemente in $M \cong \mathbb{Z}^n$ die Eckenmenge des $(n-1)$ -dimensionalen konvexen Polytops¹

$$P := \text{conv}\{\chi_\sigma : \sigma \in \binom{[n]}{k}\} := \left\{ \sum_\sigma \lambda_\sigma \chi_\sigma : 0 \leq \lambda_\sigma \leq 1 \forall \sigma, \sum_\sigma \lambda_\sigma = 1 \right\}$$

in $M_{\mathbb{R}} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^n$, das wegen der Darstellung

$$P = \{(x_1, \dots, x_n) \in [0, 1]^n : x_1 + \dots + x_n = k\}$$

der k -te *Hypersimplex* genannt wird (vgl. [Stu95]). Die Seiten F an P sind die konvexen Polytope der Form

$$F = \text{face}_{\mathbf{c}}(P) := \{u \in P : \mathbf{c}u \geq \mathbf{c}v \forall v \in P\},$$

zu den linearen Funktionalen $0 \neq \mathbf{c} \in N_{\mathbb{R}}$, und für jede Seite F an P ist

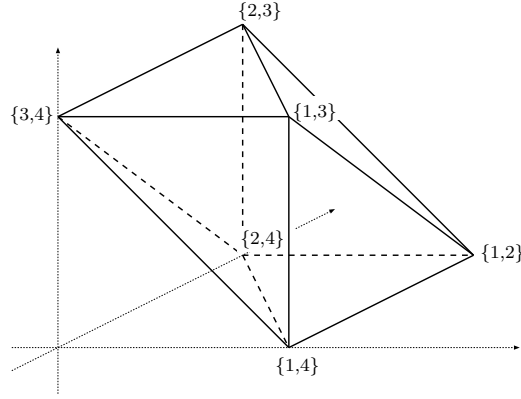
$$\mathcal{N}_P(F) := \{\mathbf{c} \in N_{\mathbb{R}} : F = \text{face}_{\mathbf{c}}(P)\}$$

der *Normalenkegel* über F . Dies sind Kegel i.S.v. 1.3.4, die einen Fächer Σ bilden, so dass jeweils die eindimensionalen Kegel $\rho = \mathcal{N}_P(\mathcal{F})$ über den Facetten \mathcal{F} an P , die mit einer Ecke χ_σ inzident sind, die Kanten des $(n-1)$ -dimensionalen Kegels $c_\sigma = \mathcal{N}_P(\chi_\sigma)$ bilden. Der eindeutig bestimmte Erzeuger $n_\rho \in N$ der Halbgruppe $\rho \cap N$ zu einer Kante ρ in Σ wird das *primitive Element* von ρ genannt.

Dem Übergang $[t_1 : \dots : t_n] \mapsto (t_1/t_n, \dots, t_{n-1}/t_n)$ von $\mathbb{T}^n/\mathbb{K}^*$ zu \mathbb{T}^{n-1} entsprechend wird M mit $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1})$ auf $M' \cong \mathbb{Z}^{n-1}$ projiziert, wobei P strukturerhaltend auf das konvexe Polytop $P' \subset M'_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^{n-1}$ abgebildet wird, das aus allen $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in [0, 1]^{n-1}$ mit $k-1 \leq x_1 + \dots + x_{n-1} \leq k$ besteht. Der dreidimensionale zweite Hypersimplex zu $n=4$ ist ein regulärer Oktaeder, dessen durch $\sigma = \{\sigma_1 < \sigma_2\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$ indizierte Ecken sich für komplementäre Indizes gegenüberliegen, und dessen 8 Facetten die Dreiecke $\mathcal{F}_i, \mathcal{F}'_i$ für $i=1, 2, 3, 4$ sind, wobei jeweils \mathcal{F}_i aus den Ecken χ_σ mit $i \in \sigma$ und \mathcal{F}'_i aus denen mit $i \notin \sigma$ gebildet

¹Die *Dimension* eines konvexen Polytops P ist die Dimension der affinen Hülle über P , also die Dimension des kleinsten Unterraums in \mathbb{R}^n , der P nach geeigneter Verschiebung enthält. Näheres zu konvexen Polytopen bei [Grü67].

wird:



Die inwendig ausgerichteten Normalen über den zweidimensionalen Seiten eines Normalenkegels c_σ werden in $M_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^4$ von den Richtungsvektoren der mit σ inzidenten Kanten erzeugt, und zwar von $\chi_\sigma - \chi_\tau$ für $\tau \neq \bar{\sigma} := \{1, 2, 3, 4\} \setminus \sigma$. Man kann $\binom{4}{2}$ mit der Menge aller Permutationen $\pi \in \mathfrak{S}_4$ mit $\pi(1) < \pi(2)$ und $\pi(3) < \pi(4)$ identifizieren, und erhält zu jedem σ eine Nummerierung der 4 Erzeuger von c_σ^\vee mit

$$v_1 := e_{\sigma_1} - e_{\bar{\sigma}_1}, \quad v_2 := e_{\sigma_2} - e_{\bar{\sigma}_1}, \quad v_3 := e_{\sigma_1} - e_{\bar{\sigma}_2}, \quad v_4 := e_{\sigma_2} - e_{\bar{\sigma}_2},$$

wobei $\bar{\sigma} = \{\bar{\sigma}_1 < \bar{\sigma}_2\}$. Dies sind auch Erzeuger der Halbgruppe $c_\sigma^\vee \cap M$, und die Relation $v_1 + v_4 = v_2 + v_3$ ergibt

$$\mathbb{K}[c_\sigma^\vee \cap M] = \mathbb{K}[t_i^{-1}t_j : i \in \bar{\sigma}, j \in \sigma] \cong \mathbb{K}[t_1, t_2, t_3, t_4] / \langle t_1t_4 - t_2t_3 \rangle,$$

d.h. der Torus $\mathbb{T}^4/\mathbb{K}^*$ wirkt auf der Menge aller $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{A}^4$, die $z_1z_4 = z_2z_3$ erfüllen, durch

$$[t_1 : t_2 : t_3 : t_4] \cdot (z_1, z_2, z_3, z_4) = (t_{\bar{\sigma}_1}^{-1}t_{\sigma_1}z_1, t_{\bar{\sigma}_1}^{-1}t_{\sigma_2}z_2, t_{\bar{\sigma}_2}^{-1}t_{\sigma_1}z_3, t_{\bar{\sigma}_2}^{-1}t_{\sigma_2}z_4).$$

Es wird nun noch kurz auf das Problem eingegangen, für welche $S \subset \binom{[n]}{k}$ die Menge $\mathfrak{G}(k, n)_S$ nichtleer ist. Dies ist ein Gegenstand der Matroid-Theorie.

1.3.5 DEFINITION

Ein Matroid über $\{1, \dots, n\}$ ist eine nichtleere Familie \mathcal{M} von Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$, so dass

- (i) für $s \in \mathcal{M}$ und $t \subset s$ auch $t \in \mathcal{M}$ gilt, und
- (ii) für $s, t \in \mathcal{M}$ mit $|s| < |t|$ ein $i \in t \setminus s$ existiert, so dass $s \cup \{i\} \in \mathcal{M}$.

Die Elemente in \mathcal{M} heißen die *unabhängigen Mengen* zu \mathcal{M} . Eine maximal unabhängige Menge heißt *Basis* von \mathcal{M} . Die Menge $\mathcal{B}(\mathcal{M})$ aller Basen von \mathcal{M} besteht immer aus Elementen gleicher Kardinalität.

1.3.6 PROPOSITION

Existiert zu $S \subset \binom{[n]}{k}$ ein $L \in \mathfrak{G}(k, n)$ mit $\text{supp } L = S$, so bildet $S = \mathcal{B}(\mathcal{M})$ die Menge der Basen eines Matroiden \mathcal{M} über $\{1, \dots, n\}$.

Beweis. Ist $S = \text{supp } x$ für eine Matrix x vom Rang k , bestehend aus Spalten $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}^k$, so ist $S \neq \emptyset$ und $\mathcal{M} := \{\tau \subset \sigma : \sigma \in S\}$ ein Matroid mit $\mathcal{B}(\mathcal{M}) = S$: für $s, t \in \mathcal{M}$ existieren $\sigma, \tau \in S$ mit $s \subset \sigma$ und $t \subset \tau$, also sind die Mengen $x(s) := \{x_i : i \in s\}$ und $x(t) := \{x_i : i \in t\}$ linear unabhängig. Für $|s| < |t|$ können daher nicht alle Elemente aus $x(t)$ in dem von $x(s)$ erzeugten Unterraum in \mathbb{K}^k enthalten sein, so dass ein $i \in t \setminus s$ existiert, mit dem $x(s) \cup \{x_i\}$ linear unabhängig ist und daher $s \cup \{i\} \in \mathcal{M}$ gilt. \square

Ein Matroid \mathcal{M} über $\{1, \dots, n\}$ wird *linear darstellbar* über einem Körper \mathbb{F} genannt, wenn es n Elemente eines \mathbb{F} -Vektorraums gibt, so dass \mathcal{M} die linear unabhängigen Teilmengen indiziert. Beispielsweise ist der Matroid über der Basismenge $\binom{n}{k}$ über jedem Körper linear darstellbar, der n paarweise verschiedene Elemente a_1, \dots, a_n enthält, da kein k -Minor der aus den Spalten $x_i = {}^t(1, a_i, a_i^2, \dots, a_i^{k-1})$ gebildeten Matrix verschwindet (Vandermonde-Determinanten). Der selbe Ansatz zeigt, dass auch jeder Matroid mit Basismenge $S = \mathcal{B}(\mathcal{M}) \subset \binom{n}{2}$ über einem solchen Körper linear darstellbar ist, da sich \mathcal{M} durch die Gleichungen $x_i = 0$ für $i \notin \cup S$ und $x_i = x_j$ für $i, j \in \cup S$ und $\{i, j\} \notin S$ charakterisieren läßt. Im Allgemeinen steht ein geeignetes Gleichungssystem jedoch nicht ohne Weiteres zur Verfügung.

1.3.7 BEISPIEL

(i) Für $n = 4$ und $k = 2$ kann man auch an dem Erzeuger

$$f := p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23}$$

des Plücker-Ideals $\mathfrak{J}_{2,4} \subset \mathbb{K}[p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{24}, p_{34}]$ (vgl. 1.2.11) erkennen, dass sich alle 36 Matroide mit Basen $S \subset \binom{4}{2}$ linear über \mathbb{K} darstellen lassen: Die an f beteiligten Monome werden durch die drei Zerlegungen

$$s_1 := \{ \{1, 2\}, \{3, 4\} \}, \quad s_2 := \{ \{1, 3\}, \{2, 4\} \}, \quad s_3 := \{ \{1, 4\}, \{2, 3\} \}$$

von $\{1, 2, 3, 4\}$ indiziert, und zu $S \subset \binom{4}{2}$ existiert genau dann ein $\omega \in \mathbb{K}^{\binom{4}{2}}$ mit Support S und $f(\omega) = 0$, wenn es zu jedem $i \in \{1, 2, 3\}$ mit $s_i \subset S$ ein $j \neq i$ mit $s_j \subset S$ gibt. Man sieht, dass auch jede Basismenge $\mathcal{B}(\mathcal{M}) \subset \binom{4}{2}$ eines Matroiden \mathcal{M} über $\{1, 2, 3, 4\}$ notwendigerweise diese Bedingung erfüllt.

(ii) Der *Vámos-Matroid* über der Basismenge

$$\binom{8}{4} \setminus \{ \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 5, 6\}, \{3, 4, 7, 8\}, \{5, 6, 7, 8\} \}$$

ist über keinem Körper linear darstellbar ([Vám78]). Die Umkehrung von 1.3.6 ist also i.A. nicht richtig.

2 Die Torische Varietät $X(k, n)$

2.1 Eine degenerierte Determinante

Es soll nun eine projektive Varietät untersucht werden, die man zunächst in einem intuitiven Sinne als degenerierte Grassmannsche auffassen kann. Dies wird dann in Abschnitt 3 in Begriffen der Deformationstheorie präzisiert.

Die geometrische Situation in 1.2 war bestimmt durch die kommutierenden Gruppenwirkungen

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_k \times \mathrm{E}_k \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathrm{E}_k \mathbb{K}^n = \bigcup_{\sigma} D(\det_{\sigma}) \\ \det \downarrow & & \downarrow \wedge_{k \times n} \\ \mathbb{K}^* \times \mathrm{E}_1 \mathbb{K}^{\binom{n}{k}} & \longrightarrow & \mathrm{E}_1 \mathbb{K}^{\binom{n}{k}} = \mathbb{A}^{\binom{n}{k}} \setminus 0 \end{array} \quad (17)$$

wobei $\mathrm{E}_k \mathbb{K}^n = \mathrm{E}_{k \times n}$ die Menge aller $(k \times n)$ -Matrizen von maximalem Rang bezeichnet und die aus den $\binom{n}{k}$ Projektionen $(\cdot)_{\sigma}: \mathbb{K}^{k \times n} \rightarrow \mathbb{K}^{k \times k}$ gebildete Funktion

$$\wedge_{k \times n}: x \mapsto (\det x_{\sigma})_{\sigma \in \binom{n}{k}},$$

auf der Vereinigung der Mengen $D(\det_{\sigma}) = (\cdot)_{\sigma}^{-1}(\mathrm{GL}_k)$ für $\sigma \in \binom{n}{k}$ die Plücker-Einbettung als Injektion der Quotienten induziert:

$$\mathfrak{G}(k, n) = \mathrm{E}_{k \times n} / \mathrm{GL}_k \hookrightarrow \mathrm{E}_1 \mathbb{K}^{\binom{n}{k}} / \mathbb{K}^* = \mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1}.$$

Vom algebraischen Standpunkt her ist die Plücker-Einbettung durch den \mathbb{K} -Algebra-Homomorphismus $\wedge_{k \times n}^*: \mathbb{K}[\mathfrak{p}] \rightarrow \mathbb{K}[\mathfrak{t}]$ mit

$$p_{\sigma} \mapsto \det_{\sigma} = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_k} \mathrm{sgn}(\pi) \pi \cdot d_{\sigma} \quad (\sigma \in \binom{n}{k})$$

definiert, wobei $d_{\sigma} = \prod_{i=1}^k t_{i, \sigma_i}$ die durch $\sigma = \{\sigma_1 < \dots < \sigma_k\}$ indizierte Diagonale bezeichnet und mit $\pi \cdot t_{i,j} = t_{\pi^{-1}(i), j}$ eine Wirkung der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_k \subset \mathfrak{S}_{k \times n}$ durch Zeilenvertauschungen als Gruppe von \mathbb{K} -Algebra-Automorphismen auf $\mathbb{K}[\mathfrak{t}]$ gegeben ist. Insbesondere ist $d_{\sigma} = d \circ (\cdot)_{\sigma}$ und d stimmt auf dem Bild der Inklusion

$$(\mathbb{K}^*)^k = \mathbb{T}^k \hookrightarrow \mathrm{GL}_k$$

des k -dimensionalen Torus als Untergruppe der Diagonalmatrizen mit der Restriktion $\det|_{\mathbb{T}^k}$ überein. Als Element der Charaktergruppe $X(\mathbb{T}^k)$ von \mathbb{T}^k ist die Diagonale d das Bild von $1 \in \mathbb{Z}$ unter der Inklusion

$$X(\mathrm{GL}_k) \cong \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}^k \cong X(\mathbb{T}^k) = M$$

von abelschen Gruppen, also die Graduierung $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_k) \mapsto u_1 + \dots + u_k$ für 1-Parameter-Untergruppen $\mathbf{u} \in N = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z})$. Die GL_k -Wirkung auf $\mathbb{A}^{k \times n}$ induziert die freie Wirkung durch zeilenweise Multiplikation der Untergruppe \mathbb{T}^k auf einer offenen Teilmenge $D_{k \times n}$ in $\mathbb{A}^{k \times n}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}^k \times D_{k \times n} & \longrightarrow & D_{k \times n} = \bigcup_{\sigma} D(d_{\sigma}) \\ d \downarrow & & \downarrow \delta_{k \times n} \\ \mathbb{K}^* \times D_{1 \times \binom{n}{k}} & \longrightarrow & D_{1 \times \binom{n}{k}} = \mathbb{A}^{\binom{n}{k}} \setminus 0 \end{array}$$

Die "degenerierte Grassmannsche", die Gegenstand der Untersuchungen in diesem Abschnitt ist, ist die folgendermaßen definierte projektive Varietät.

2.1.1 DEFINITION

Es bezeichne $\delta_{k \times n}^*$ den \mathbb{K} -Algebra-Homomorphismus mit

$$\delta_{k \times n}^*: \mathbb{K}[\mathbf{p}] \longrightarrow \mathbb{K}[\mathbf{t}], \quad p_\sigma \longmapsto d_\sigma = \prod_{i=1}^k t_{i, \sigma_i} \quad (\sigma \in \binom{n}{k}),$$

sowie $I_{k,n}$ das homogene Primideal $\ker \delta_{k \times n}^*$, und $X(k,n)$ das projektive Schema $\text{Proj } \mathbb{K}[\mathbf{p}]/I_{k,n}$.

Setzt man $\delta_{k \times n}^{*\pi}: p_\sigma \longmapsto \pi \cdot d_\sigma$ für eine beliebige Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_k$, so ist $\ker \delta_{k \times n}^{*\pi} = I_{k,n}$, da \mathfrak{S}_k durch \mathbb{K} -Algebra-Automorphismen wirkt. $X(k,n)$ ist also der gemeinsame Abschluss über den Bildern der zugehörigen rationalen Abbildungen

$$\delta_{k \times n}^\pi: \mathbb{A}^{k \times n} \dashrightarrow \mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1} \quad (\pi \in \mathfrak{S}_k).$$

Die Abbildung $\delta_{k \times n}$ ist als Funktion in den projektiven Raum zwar konstant auf den \mathbb{T}^k -Orbits, jedoch ist die induzierte Abbildung

$$D_{k \times n}/\mathbb{T}^k \longrightarrow \mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1}$$

auf dem Quotienten für $1 < k < n$ nicht injektiv, schon weil nicht alle Einträge einer $(k \times n)$ -Matrix an einer der σ -Diagonalen beteiligt sind.

2.1.2 THEOREM

Die projektive Varietät $X(k,n)$ ist der Abschluss über dem Bild einer offenen Einbettung

$$\mathbb{T}^{k \times (n-k)} \hookrightarrow \mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1},$$

wobei man den Torus $\mathbb{T}^{k \times (n-k)}$ unter der rationalen Abbildung $\delta_{k \times n}$ als den Quotienten $\mathbb{T}^{k \times (n-k+1)}/\mathbb{T}^k$ zu $\mathbb{T}^{k \times (n-k+1)} \subset \bigcap_\sigma D(d_\sigma)$ erhält.

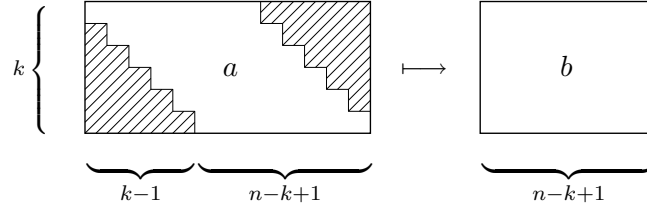
Beweis. Es sei ein $\sigma = \{\sigma_1 < \dots < \sigma_k\}$ fixiert. Die \mathbb{T}^k -invariante Projektion $\text{diag}_\sigma := \text{diag} \circ (\cdot)_\sigma: D(d_\sigma) \rightarrow \mathbb{T}^k$ liefert analog zu 1.2 für die \mathbb{T}^k -Wirkung auf $D(d_\sigma)$ das Repräsentantensystem

$$D(d_\sigma)/\mathbb{T}^k \hookrightarrow D(d_\sigma), \quad \mathbb{T}^k(x) \longmapsto \tilde{\pi}_\sigma(x) := (\text{diag}_\sigma x)^{-1}x,$$

mit der regulären Projektion $\tilde{\pi}_\sigma: D(d_\sigma) \rightarrow \tilde{X}_\sigma$, so dass die abgeschlossenen Punkte des affinen Schemas $\tilde{X}_\sigma = \text{diag}_\sigma^{-1}(\{1_{\mathbb{T}^k}\}) \cong \mathbb{A}^{kn-k}$ den \mathbb{T}^k -Orbits über $D(d_\sigma)$ entsprechen.

Zu einem Eintrag $a_{i,j}$ in einer $(k \times n)$ -Matrix $a = (a_{i,j})$ gibt es genau dann ein $\tau = \{\tau_1 < \dots < \tau_k\}$ mit $j = \tau_i$ für ein i wenn $i \leq j \leq n - k + i$. Unter der Zuordnung $a_{i,j} \longmapsto b_{i,j-i+1}$ bilden diese $a_{i,j}$ eine $k \times (n - k + 1)$ Matrix $b = (b_{i,j})$, die zeilenweise

gerade die für $\delta_{k \times n}$ relevanten Einträge von a enthält:



Die dadurch beschriebene Projektion $\psi: \tilde{X}_\sigma \rightarrow \mathbb{A}^{k \times (n-k)}$, die jeweils a auf die nicht an der σ -Diagonalen beteiligten Einträge aus b abbildet, ist ein regulärer \mathbb{T}^k -Morphismus und das Bild von $D(d_\sigma)$ unter $\delta_{k \times n}$ wird aus dem Bild dieser Projektion gewonnen. Da \tilde{X}_σ ein Repräsentantensystem der \mathbb{T}^k -Wirkung ist und der Torus durch zeilenweise Multiplikation operiert, ist die Abbildung, die den $\psi(a)$ die Diagonalen in a zuordnet, injektiv, sofern die Einträge in den $\psi(a)$ alle von Null verschieden sind. Restriktion auf den Durchschnitt über allen $D(d_\tau)$ bettet daher den Torus $\mathbb{T}^{k \times (n-k)}$ als offene Teilmenge $\mathbb{T}^{\binom{n}{k}-1} \cap X(k, n) \upharpoonright_{D(d_\sigma)}$ ein, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc}
 \bigcap_\tau D(d_\tau) & \xrightarrow{\delta_{k \times n} \upharpoonright_{D(d_\sigma)}} & U_\sigma \\
 \downarrow \tilde{\pi}_\sigma & & \downarrow \cong \\
 \tilde{X}_\sigma & \xrightarrow{\delta_{k \times n} \upharpoonright_{X_\sigma}} & \mathbb{A}^{\binom{n}{k}-1} \\
 & \searrow \psi & \swarrow \\
 & \mathbb{T}^{k \times (n-k)} &
 \end{array}$$

Dabei ist $\{U_\sigma\}_\sigma$ die übliche offene Überdeckung von $\mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1}$ (s. 1.2.2). Damit ist $\mathbb{T}^{k \times (n-k)}$ in jedem Teil der offenen Überdeckung $\{U_\sigma \cap X(k, n)\}_\sigma$ von $X(k, n)$ als dichte offene Teilmenge enthalten. \square

Insbesondere geht die offene Einbettung in 2.1.2 für $k = 1$ in die natürliche Einbettung

$$\mathbb{T}^{n-1} = \mathbb{T}^n / \mathbb{K}^* \hookrightarrow \mathbb{P}^{n-1} = X(1, n)$$

über, während ihr Bild für $1 < k < n$ im Torus $\mathbb{T}^{\binom{n}{k}-1} \subset \mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1}$ echt enthalten ist.

2.1.3 BEISPIEL

Im Fall $k = 2$, $n = 4$, liegt jeder homogene Punkt $z = [1 : z_{13} : z_{14} : z_{23} : z_{24} : z_{34}]$, der die Gleichung

$$z_{14}z_{23} = z_{13}z_{24} \quad (*)$$

erfüllt, unter der Voraussetzung, dass alle z_{ij} von Null verschieden sind, im Bild von $\delta_{2 \times 4}$, denn man hat dann

$$\begin{pmatrix} 1 & z_{23}/z_{13} & z_{34}/z_{14} & 0 \\ 0 & 1 & z_{13} & z_{14} \end{pmatrix} \mapsto [1 : z_{13} : z_{14} : z_{23} : z_{14}z_{23}/z_{13} : z_{34}] = z.$$

Da diese Punkte als dichte offene Teilmenge in der homogenen Nullstellenmenge $(*)$ liegen, erhält man

$$I_{2,4} = \langle p_{14}p_{23} - p_{13}p_{24} \rangle. \quad (2.1.4)$$

Tatsächlich ist das Bild hier nicht abgeschlossen, denn z.B. liegt der homogene Punkt $z_0 = [1: 0: 0: 1: 1: 1]$ im Abschluss, während es keine Matrix

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & * \\ * & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$$

mit $\delta_{2 \times 4}(a) = [a_{11}a_{22} : a_{11}a_{23} : a_{11}a_{24} : a_{12}a_{23} : a_{12}a_{24} : a_{13}a_{24}] = z_0$ geben kann.

2.2 Modellierung durch Punktkonfigurationen

Der Homomorphismus 2.1.1,

$$\delta_{k \times n}^* : \mathbb{K}[\mathbf{p}] = \mathbb{K}[p_\sigma : \sigma \in \binom{n}{k}] \longrightarrow \mathbb{K}[\mathbf{t}] = \mathbb{K}[t_{i,j} : i = 1 \dots k, j = 1 \dots n],$$

hat die Eigenschaft, dass er jede der freien Variablen p_σ auf ein Monom in $\mathbb{K}[\mathbf{t}]$ abbildet. Er wird also durch einen Homomorphismus von Halbgruppen induziert:

$$A_{k,n} : \mathbb{N}^{\binom{n}{k}} \longrightarrow \mathbb{N}^{k \times n}, e_\sigma \longmapsto \sum_{i=1}^k \varepsilon_{i,\sigma_i} \quad (\sigma = \{\sigma_1 < \dots < \sigma_k\}), \quad (2.2.1)$$

wobei mit e_σ und $\varepsilon_{i,j}$ jeweils die Elemente der Standardbasis bezeichnet sind. Damit läßt sich das Ideal $I_{k,n} = \ker \delta_{k \times n}^* \subset \mathbb{K}[\mathbf{p}]$ durch die Untergruppe

$$\ker_{\mathbb{Z}} A_{k,n} := \{\mathbf{u} - \mathbf{v} : A_{k,n}\mathbf{u} = A_{k,n}\mathbf{v}\} \subset \mathbb{Z}^{\binom{n}{k}}$$

beschreiben, während die Spalten der Matrix $A_{k,n}$, aufgefasst als Punktkonfiguration in $\mathbb{Z}^{k \times n}$, eine Halbgruppe erzeugen, die den Koordinatenring $\mathbb{K}[\mathbf{p}]/I_{k,n}$ von $X(k,n)$ als Halbgruppen-Algebra induziert.

Allgemein wird der Kern eines solchen Homomorphismus als *torisches Ideal* bezeichnet. Die Definitionen wird hier zusammen mit einigen Folgerungen aus [Stu95] (Lec.4) zitiert.

2.2.2 DEFINITION+PROPOSITION

Der zu einer Konfiguration $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\} \subset \mathbb{Z}^d$ gehörige Halbgruppenhomomorphismus

$$\pi_{\mathcal{A}} : \mathbb{N}^m \longrightarrow \mathbb{Z}^d, \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m) \longmapsto u_1\mathbf{a}_1 + \dots + u_m\mathbf{a}_m,$$

induziert einen Homomorphismus von Halbgruppenalgebren:

$$\hat{\pi}_{\mathcal{A}} : \mathbb{K}[\mathbf{x}] := \mathbb{K}[x_1, \dots, x_m] \longrightarrow \mathbb{K}[\mathbf{t}^{\pm 1}] := \mathbb{K}[t_1, \dots, t_d, t_1^{-1}, \dots, t_d^{-1}].$$

Das Ideal $I_{\mathcal{A}} := \ker \hat{\pi}_{\mathcal{A}}$ wird als das *torische Ideal* zur Konfiguration \mathcal{A} bezeichnet.

- (i) Es bezeichne $\ker_{\mathbb{Z}} \mathcal{A}$ die von allen $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ mit $\pi_{\mathcal{A}}(\mathbf{u}) = \pi_{\mathcal{A}}(\mathbf{v})$ erzeugte Untergruppe in \mathbb{Z}^m . Das Binomideal $I_{\mathcal{A}}$ wird als \mathbb{K} -Vektorraum von den Binomen $\mathbf{x}^{\mathbf{u}} - \mathbf{x}^{\mathbf{v}}$ mit $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \ker_{\mathbb{Z}} \mathcal{A}$ erzeugt, und hat eine Darstellung

$$I_{\mathcal{A}} = \langle \mathbf{x}^{\mathbf{u}^+} - \mathbf{x}^{\mathbf{v}^-} : \mathbf{u} \in \ker \pi_{\mathcal{A}} \rangle,$$

wobei für $\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^m$ $\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_- \in \mathbb{N}^m$ die eindeutig bestimmten Vektoren mit der Eigenschaft sind, dass sie $\mathbf{u} = \mathbf{u}_+ - \mathbf{u}_-$ erfüllen und in keiner Koordinate beide positive Einträge haben.

- (ii) Die Dimension einer Konfiguration \mathcal{A} ist $\dim \mathcal{A} := \dim \mathbb{Z}\mathcal{A}$, wobei $\mathbb{Z}\mathcal{A}$ die von \mathcal{A} erzeugte Untergruppe in \mathbb{Z}^m bezeichnet. Dies ist der Rang der entsprechenden Matrix in $\mathbb{Q}^{m \times d}$ und stimmt mit der Krull-Dimension des Rings $\mathbb{K}[\mathbf{x}]/I_{\mathcal{A}}$ überein.
- (iii) Eine Konfiguration \mathcal{A} heißt *graduirt*, falls ein Vektor $\omega \in \mathbb{Q}^d$ existiert, so dass ${}^t\mathbf{a}_i\omega = 1$ für $i = 1 \dots m$, m.a.W. wenn der Vektor $(1, \dots, 1) \in \mathbb{N}^m$ im Zeilenraum der aus \mathcal{A} gebildeten $\mathbb{Q}^{d \times m}$ -Matrix liegt. Das torische Ideal $I_{\mathcal{A}}$ ist genau dann homogen, wenn \mathcal{A} graduirt ist.

In der Terminologie von 1.3.4 (S.17) ist eine Konfiguration $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\} \subset \mathbb{Z}^d$ als Erzeugermenge einer Halbgruppe in der Charaktergruppe M des Torus $\mathbb{T}^d = (\mathbb{K}^*)^d$ aufzufassen. Sie definiert damit einen Morphismus

$$\mathbb{T}^d \longrightarrow \mathbb{T}^m = (\mathbb{K}^*)^m, \quad \mathbf{t} = (t_1, \dots, t_d) \longmapsto (\mathbf{t}^{\mathbf{a}_1}, \dots, \mathbf{t}^{\mathbf{a}_m}), \quad (*)$$

von algebraischen Gruppen. Der Zariski-Abschluss über dem Bild von $(*)$ in \mathbb{A}^m ist das affine Schema $X_{\mathcal{A}} := \text{Spec } \mathbb{K}[\mathbf{x}]/I_{\mathcal{A}}$. Ist $\dim \mathcal{A} = d$, so hat $(*)$ eine reguläre Umkehrung und wird zu einem Isomorphismus $\mathbb{T}^d \cong X_{\mathcal{A}} \cap T^m$ von algebraischen Gruppen (s. [Stu95], L.13.4), so dass man \mathbb{T}^d als dichte offene Teilmenge in $X_{\mathcal{A}}$ erhält, zusammen mit einer Wirkung $\mathbb{T}^d \times X_{\mathcal{A}} \longrightarrow X_{\mathcal{A}}$ als Fortsetzung der natürlichen Wirkung von \mathbb{T}^d auf sich selbst. Eine graduirte Konfiguration liefert ein homogenes Ideal $I_{\mathcal{A}}$, woraus unter der Substitution $x_i \longmapsto 1$ torische Ideale $I_{\mathcal{A}-\mathbf{a}_i}$ zu $\mathcal{A} - \mathbf{a}_i = \{\mathbf{a} - \mathbf{a}_i : \mathbf{a} \in \mathcal{A}\}$ für $i = 1 \dots m$ resultieren, so dass die affinen Varietäten $X_{\mathcal{A}-\mathbf{a}_i}$ eine offene Überdeckung der projektiven Varietät $Y_{\mathcal{A}} \subset \mathbb{P}^{m-1}$ mit affinem Kegel $X_{\mathcal{A}}$ bilden.

Eine durch eine Konfiguration \mathcal{A} gegebene Torische Varietät hat jedoch nicht unbedingt die Eigenschaft, *normal* zu sein. Eine affine Torische Varietät $X_{\mathcal{A}}$ ist genau dann normal, wenn die Punktmenge $\mathbb{Z}\mathcal{A} \cap \text{pos}(\mathcal{A})$ in der von \mathcal{A} erzeugten Halbgruppe $\mathbb{N}\mathcal{A}$ enthalten ist. Ist \mathcal{A} eine graduirte Konfiguration, so ist $X_{\mathcal{A}}$ genau dann normal, wenn die affinen Karten $X_{\mathcal{A}-\mathbf{a}_i}$ alle normal sind, und sie ist projektiv normal, wenn der affine Kegel $X_{\mathcal{A}}$ normal ist (vgl. [Stu96], Lec.2).

2.2.3 BEISPIEL

- (i) Die graduirte Konfiguration $\mathcal{A}_{2,4} \subset \mathbb{Z}^{2 \times 4}$ zum \mathbb{K} -Algebra-Homomorphismus 2.1.1 (entsprechend 2.2.1) bildet die Matrix

$$A_{2,4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{(2 \times 4) \times \binom{4}{2}},$$

wobei Zeilen und Spalten jeweils lexikographisch angeordnet sind. Der Kern von $A_{2,4}$ als linearer Abbildung $\mathbb{Q}^6 \longrightarrow \mathbb{Q}^8$ wird von dem Vektor

$${}^t(0, -1, 1, 1, -1, 0) \in \mathbb{Q}^6 \quad (2.2.4)$$

erzeugt. Dieser erzeugt nun bereits, da die Einträge ganzzahlig und teilerfremd sind, den Kern von $A_{2,4}$ als Homomorphismus von \mathbb{Z} -Moduln und damit auch den Kern der Konfiguration $\mathcal{A}_{2,4}$ i.S.v. 2.2.2, liefert also erneut (vgl. 2.1.3, S.23) den Erzeuger

$$p_{14}p_{23} - p_{13}p_{24}$$

des Hauptideals $I_{2,4} = I_{\mathcal{A}_{2,4}}$.

- (ii) Die Gewichte der \mathbb{T}^n -Wirkung auf die Grassmannsche $\mathfrak{G}(k, n)$ (vgl. 1.3.3, S.16) bilden die graduierte Konfiguration

$$\tilde{\mathcal{A}}_{k,n} = \{e_{\sigma_1} + \dots + e_{\sigma_k} : 1 \leq \sigma_1 < \dots < \sigma_k \leq n\} \subset \mathbb{Z}^n, \quad (2.2.5)$$

so dass die zugehörige projektive Varietät $Y_{\tilde{\mathcal{A}}_{k,n}}$ den Abschluss über dem generischen \mathbb{T}^n -Orbit in $\mathfrak{G}(k, n)$ bildet. Für $k = 2$ und $n = 4$ erhält man also die Matrix¹

$$\tilde{A}_{2,4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{4 \times \binom{4}{2}}.$$

Man berechnet hierfür $I_{\tilde{\mathcal{A}}_{2,4}} = \langle p_{12}p_{34} - p_{14}p_{23}, p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} \rangle$.

2.2.6 PROPOSITION

$X(k, n)$ enthält den Abschluss über dem generischen \mathbb{T}^n -Orbit in der Grassmannschen $\mathfrak{G}(k, n)$ (s. 1.3.3) als torische Untervarietät.

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass das torische Ideal $I_{k,n}$ in dem Ideal $I_{\mathcal{A}}$ zu der aus den Gewichten der \mathbb{T}^n -Wirkung auf $\mathfrak{G}(k, n)$ gebildeten Konfiguration $\tilde{\mathcal{A}}_{k,n}$ (2.2.5) enthalten ist. Dies folgt mit 2.2.2(i) aus $\ker_{\mathbb{Z}} \mathcal{A}_{k,n} \subset \ker_{\mathbb{Z}} \tilde{\mathcal{A}}_{k,n}$, und das ist klar, da die durch (i, j) mit $i = 1 \dots k$, $j = 1 \dots n$, indizierten Zeilen der Matrix $A_{k,n}$ nach i gruppiert k Untermatrizen bilden, die sich zu der aus $\tilde{\mathcal{A}}_{k,n}$ gebildeten Matrix $\tilde{A}_{k,n}$ aufsummieren. \square

Da für $1 \leq \sigma_1 < \dots < \sigma_k \leq n$ immer $i \leq \sigma_i \leq n - k + i$ gilt, verschwinden in der Matrix $A_{k,n}$ die Zeilen mit den Indizes (i, j) für $i > j$ oder $j > n - k + i$, so dass nur $k(n - k + 1)$ Zeilen relevant sind. Da $X(k, n)$ nach 2.1.2 aber eine $k(n - k)$ -dimensionale projektive Varietät ist, gilt nach 2.2.2 (iii) sogar:

$$\dim \mathcal{A}_{k,n} = \dim \mathbb{K}[\mathbf{p}]/I_{k,n} = k(n - k) + 1.$$

Entsprechend soll nun $\mathcal{A}_{k,n}$ zu einer Konfiguration in $\mathbb{Z}^{k(n-k)+1}$ "verdichtet" werden, die zu einem Homomorphismus

$$\mathbb{K}[\mathbf{p}] \longrightarrow \mathbb{K}[\mathbf{s}, s_0] = \mathbb{K}[\mathbf{s}] \otimes \mathbb{K}[s_0]$$

gehört, wobei $\mathbf{s} := (s_{i,j} : i = 1 \dots k, j = 1 \dots n - k)$ ein geordnetes System von Unbestimmten und s_0 eine weitere Unbestimmte bezeichnet.

¹Wie [Stu95](Lec.9) bemerkt, ist die zugehörige Matrix für $k = 2$ die Inzidenzmatrix zum vollständigen Graphen K_n .

2.2.7 THEOREM

Es sei $\varphi: \mathbb{K}[\mathbf{t}] \longrightarrow \mathbb{K}[\mathbf{s}]$ der \mathbb{K} -Algebra-Homomorphismus mit

$$t_{i,j} \longmapsto \prod_{\nu=1}^{n-k-j+i} s_{i,\nu} \quad (i \leq j < n - k + i)$$

und $t_{i,j} \longmapsto 1$ für $i > j$ oder $j \geq n - k + i$. Dann gilt

$$\ker(s_0 \circ \varphi \circ \delta_{k \times n}^*) = \ker \delta_{k \times n}^*,$$

wobei $s_0: \mathbb{K}[\mathbf{s}] \hookrightarrow \mathbb{K}[\mathbf{s}, s_0]$ die Multiplikation mit s_0 bezeichnet.

Beweis. Es sei I das maximale Ideal $\langle t_{i,j} - 1: i > j \text{ oder } j \geq n - k + i \rangle$. Man erhält Isomorphismen

$$\mathbb{K}[\mathbf{t}]/I \cong \mathbb{K}[t_{i,j}: i \leq j < n - k + i] \cong \mathbb{K}[\mathbf{s}] \cong \bigotimes_{i=1}^k \mathbb{K}[t_1, \dots, t_{n-k}]$$

und entsprechend $\varphi \cong \bigotimes_{i=1}^k \tilde{\varphi}$ mit

$$\tilde{\varphi}: \mathbb{K}[t_1, \dots, t_{n-k}] \longrightarrow \mathbb{K}[t_1, \dots, t_{n-k}], \quad t_j \longmapsto \prod_{\nu=1}^{n-k-j+1} t_\nu.$$

Da $\tilde{\varphi}$ offenbar injektiv ist, folgt $\ker \varphi = I$. Die einzige Menge $\sigma = \{\sigma_1 < \dots < \sigma_k\} \in \binom{n}{k}$ mit $\varphi(\delta_{k \times n}^*(p_\sigma)) = 1$ ist nun $\sigma_0 := \{n - k + 1, \dots, n\}$, woraus

$$\ker(\varphi \circ \delta_{k \times n}^*) = \ker \delta_{k \times n}^* + \langle p_{\sigma_0} - 1 \rangle$$

und damit die Behauptung folgt. □

Die Komposition in 2.2.7 ist die Abbildung

$$p_\sigma \longmapsto s_0 \prod_{i=1}^k \prod_{\nu=1}^{n-k-(\sigma_i-i)} s_{i,\nu} = s_0 \prod_{n-k-j \geq \sigma_i-i} s_{i,j}$$

für $\sigma = \{\sigma_1 < \dots < \sigma_k\} \in \binom{n}{k}$.

2.2.8 DEFINITION

Es sei

$$\mathcal{A}_{k,n}^1 := \{\chi(\sigma): \sigma \in \binom{n}{k}\} \subset \mathbb{Z}^{k \times (n-k)},$$

wobei jeweils $\chi(\sigma)$ die $k \times (n-k)$ Matrix $(\chi(\sigma)_{ij})$ mit

$$\chi(\sigma)_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } n - k - j \geq \sigma_i - i, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (\sigma = \{\sigma_1 < \dots < \sigma_k\} \in \binom{n}{k})$$

bezeichnet.

Es ist also

$$\mathcal{A}_{k,n}^1 \times \{1\} \subset \mathbb{Z}^{k \times (n-k)} \oplus \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}^{k(n-k)+1}$$

die graduierte Konfiguration zu dem in 2.2.7 definierten \mathbb{K} -Algebra-Homomorphismus $\mathbb{K}[\mathbf{p}] \longrightarrow \mathbb{K}[\mathbf{s}, s_0]$, die ebenfalls $X(k, n)$ definiert.

2.2.9 BEISPIEL

Die Konfiguration $\mathcal{A}_{2,4}^1 \times \{1\}$ läßt sich durch die Matrix

$$A_{2,4}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot A_{2,4}$$

(vgl. 2.2.3(i)), darstellen, wobei die Multiplikation den in 2.2.7 benutzten Homomorphismus repräsentiert, der die Konfiguration $\mathcal{A}_{2,4} \subset \mathbb{Z}^{2 \times 4}$ auf $\mathcal{A}_{2,4}^1 \times \{1\} \subset \mathbb{Z}^{2 \times 2} \oplus \mathbb{Z}$ reduziert.

2.3 Parametrisierung durch Ordnungsideale

Es stellt sich nun heraus, dass sich Begriffe der Ordnungstheorie zur Beschreibung der Konfiguration $\mathcal{A}_{k,n}^1$ eignen. Die folgenden Begriffe werden hier benutzt.

2.3.1 DEFINITION

Es sei (P, \leq) eine partielle Ordnung.

- (i) Eine Teilmenge $C \subset P$ heißt Kette in P , falls alle Elemente in C vergleichbar sind. Die durch Inklusion partiell geordnete Menge aller Ketten in P wird mit $\mathcal{C}(P)$ bezeichnet.
- (ii) Ein Ideal (Ordnungsideal) in P ist eine Teilmenge $I \subset P$ mit der Eigenschaft, dass für alle $u \in I$ gilt:

$$v \in P, v \leq u \implies v \in I.$$

Offenbar ist die Menge der Ideale in P abgeschlossen gegenüber Durchschnitt und Vereinigung. Der Idealverband von P , also der durch Inklusion gegebene distributive Verband aller Ideale in P , wird mit $\mathcal{I}(P)$ bezeichnet.

- (iii) Eine Teilmenge $I \subset P$ heißt Filter in P , falls für alle $u \in I$ und alle $v \in P$ aus $u \leq v$ immer $v \in I$ folgt. Der Verband der Filter in P wird mit $\overline{\mathcal{I}}(P)$ bezeichnet.
- (iv) Der charakteristische Vektor zu einem Ideal oder Filter I in P wird mit $\chi(I)$ bezeichnet, wobei $\chi(I) = (\chi(I)_u)_{u \in P} \in \{0, 1\}^P$ mit

$$\chi(I)_u := \begin{cases} 1, & \text{falls } u \in I, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

2.3.2 DEFINITION

Mit $k \times (n-k)$ wird das Kettenprodukt $\{1 < \dots < k\} \times \{1 < \dots < n-k\}$ bezeichnet, also die durch

$$(\nu, \mu) \leq (i, j) : \iff \nu \leq i \text{ und } \mu \leq j$$

für $\nu, i \in \{1, \dots, k\}$ und $\mu, j \in \{1, \dots, n-k\}$ definierte partielle Ordnung.

2.3.3 PROPOSITION

Die Ideale über der partiellen Ordnung $k \times (n-k)$ sind genau die Mengen der Form

$$I(\sigma) := \{(i, j) : n - k - j \geq \sigma_i - i\} \quad (\sigma = \{\sigma_1 < \dots < \sigma_k\} \in \binom{n}{k}).$$

Beweis. Ist $\sigma = \{\sigma_1 < \dots < \sigma_k\}$ und $(i, j) \in I(\sigma)$, so gilt $n - k - \mu \geq n - k - j \geq \sigma_i - i \geq \sigma_u - \nu$ für $(\nu, \mu) \leq (i, j)$, also $(\nu, \mu) \in I(\sigma)$. Sei umgekehrt $I \in \mathcal{I}(k \times (n-k))$ gegeben. Für $i \in \{1, \dots, k\}$ sei $j(i)$ das größte $j \in \{1, \dots, n-k\}$ mit $(i, j) \in I$, falls so ein j existiert und sonst 0. Mit $\sigma_i := n - k - j(i) + i$ gilt dann $\sigma_1 \geq 1$ wegen $j(1) \leq n - k$ und $\sigma_k \leq n$ wegen $j(k) \geq 0$. Wäre $j(i) < j(i+1)$ für ein $i < k$, so wäre $j(i+1) > 0$, also $(i+1, j(i+1)) \in I$ und, da I ein Ideal ist, $(i, j(i+1)) \in I$, im Widerspruch zur Wahl von $j(i)$. Also gilt stets $j(i) + 1 > j(i+1)$ und daher $\sigma_i < \sigma_{i+1}$. Für $\sigma := \{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ ist dann $I(\sigma)$ die Menge aller (i, j) mit $j \leq j(i)$, also $I(\sigma) = I$. \square

2.3.4 KOROLLAR

Die Matrizen $\chi(\sigma) \in \mathcal{A}_{k,n}^1$ (s. 2.2.8) sind genau die charakteristischen Vektoren $\chi(I) = \chi(\sigma)$ zu den Ordnungsidealen $I = I(\sigma)$ für $\sigma \in \binom{n}{k}$.

Es wird gelegentlich von Ordnungsidealen gefordert, dass sie nichtleer sind. Da die Vektoren $\chi(\sigma) + 1 \in \mathcal{A}_{k,n}^1 \times \{1\}$ die charakteristischen Vektoren zu den nichtleeren Idealen der Ordnung $(k \times (n-k)) \cup \{0\}$ mit 0 als kleinstem Element bilden, würde eine entsprechende Korrespondenz auch unter dieser Voraussetzung bestehen. Hier erweist sich jedoch der Verzicht auf diese Voraussetzung als vorteilhaft, da die Filter in einer partiellen Ordnung P so gerade die Mengen $P \setminus I$ für $I \in \mathcal{I}(P)$ sind.

2.3.5 DEFINITION+PROPOSITION

Die Konfiguration $\overline{\mathcal{A}}_{k,n}^1 \times \{1\}$ mit

$$\overline{\mathcal{A}}_{k,n}^1 := \{\chi(I) : I \in \overline{\mathcal{I}}(k \times (n-k))\},$$

die man erhält, indem man in den Matrizen $\chi(I)$ in 2.3.4 jede 1 durch eine 0 ersetzt und umgekehrt, definiert ebenfalls die Torische Varietät $X(k, n)$.

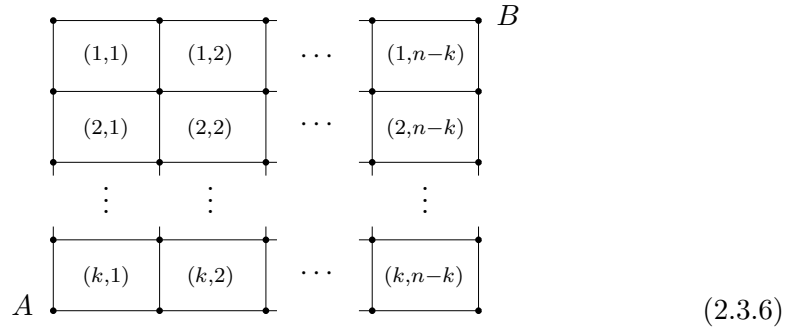
Beweis. Dies ist klar, da $\mathcal{A}_{k,n}^1 \times \{1\} \subset \{0, 1\}^{k(n-k)} \times \{1\}$ graduiert ist, denn man erhält für $\mathbf{u} = (u_\sigma) \in \ker_{\mathbb{Z}}(\mathcal{A}_{k,n}^1 \times \{1\})$ und $w \in k \times (n-k)$ jeweils

$$\sum_{w \in \overline{I}(\sigma)} u_\sigma = \sum_{w \notin I(\sigma)} u_\sigma = \sum_{\sigma} u_\sigma - \sum_{w \in I(\sigma)} u_\sigma = 0,$$

also $\ker_{\mathbb{Z}}(\overline{\mathcal{A}}_{k,n}^1 \times \{1\}) = \ker_{\mathbb{Z}}(\mathcal{A}_{k,n}^1 \times \{1\})$. \square

Die Korrespondenz 2.3.3 zwischen den Ordnungsidealen über $k \times (n-k)$ und den Mengen $\sigma \in \binom{n}{k}$ erhält eine anschauliche Interpretation, wenn man die zu einer Matrix angeordneten Elemente aus $k \times (n-k)$ als die Zellen eines viereckigen Gitters, bestehend aus $(k+1)(n-k+1)$ Punkten, verbunden durch $k(n-k+1)$ vertikale

und $k(n - k + 1)$ horizontale Kanten, auffasst:



Ein Pfad in diesem Gitter sei ein monotoner Kantenweg von der linken unteren Ecke A zur rechten oberen Ecke B des Gitters, also eine Folge

$$\Pi = (K_1, \dots, K_n)$$

von n Gitterkanten, so dass K_1 von A ausgeht, K_i mit K_{i+1} für $i = 1 \dots n - 1$ zusammenhängt und K_n in B endet. Jeder Pfad ist durch die Indizes der k vertikalen Kanten charakterisiert, d.h. die Pfade werden durch die Mengen $\sigma \in \binom{n}{k}$ indiziert:

$$\Pi(\sigma) = (K_1, \dots, K_n) \iff K_{n-i+1} \text{ vertikal für } i \in \sigma.$$

Jeder Pfad zerlegt $k \times (n - k)$ in zwei Teile, nämlich in ein Ideal $I \in \mathcal{I}(k \times (n - k))$ und den zugehörigen Filter $k \times (n - k) \setminus I$. Da man umgekehrt zu jedem Ideal auch einen Pfad als Begrenzung erhält, sind die Elemente aus $\mathcal{I}(k \times (n - k))$ also genau die Mengen der Form

$$I(\Pi) := \{u \in k \times (n - k) : u \text{ liegt links bzw. oberhalb von } \Pi\}. \quad (2.3.7)$$

Dabei gibt im Pfad $\Pi(\sigma) = (K_1, \dots, K_n)$ für $\sigma = \{\sigma_1 < \dots < \sigma_k\}$ die Zahl $\sigma_i - i$ jeweils den Abstand der i -ten vertikalen Kante K_{σ_i} vom linken Rand an, so dass

$$I(\sigma) = I(\Pi(\sigma)) \quad (2.3.8)$$

für $\sigma \in \binom{n}{k}$, mit $I(\sigma)$ entsprechend 2.3.3.

2.3.9 DEFINITION

Es sei $I(\sigma) \in \mathcal{I}(k \times (n - k))$ zu $\sigma \in \binom{n}{k}$ gemäß 2.3.3 definiert. Für $\sigma, \tau \in \binom{n}{k}$ sei

$$\begin{aligned} \sigma \leq \tau &: \iff I(\sigma) \subset I(\tau), \text{ sowie} \\ \sigma \wedge \tau &:= \rho \text{ mit } I(\rho) = I(\sigma) \cap I(\tau) \text{ und} \\ \sigma \vee \tau &:= \rho \text{ mit } I(\rho) = I(\sigma) \cup I(\tau). \end{aligned}$$

Ferner sei die Unvergleichbarkeit von σ, τ mit

$$\sigma \perp \tau : \iff \sigma \not\leq \tau \text{ und } \tau \not\leq \sigma$$

notiert.

Die Korrespondenz 2.3.8 zeigt, dass der von $\mathcal{I}(k \times (n-k))$ auf $\binom{n}{k}$ übertragene distributive Verband durch

$$\begin{aligned} \sigma \leq \tau &\iff \sigma_i \leq \tau_i \text{ für } i = 1 \dots k, \text{ sowie} \\ \sigma \wedge \tau &= \{\min(\sigma_1, \tau_1), \dots, \min(\sigma_k, \tau_k)\} \quad \text{und} \\ \sigma \vee \tau &= \{\max(\sigma_1, \tau_1), \dots, \max(\sigma_k, \tau_k)\} \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

für $\sigma = \{\sigma_1 < \dots < \sigma_k\}, \tau = \{\tau_1 < \dots < \tau_k\} \in \binom{n}{k}$ gegeben ist.

2.3.11 BEISPIEL

Für $k = 2$ und $n = 4$ entsprechen den Pfaden im Gitter 2.3.6 die 6 Punkte

$$\left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \right).$$

Die dazu "komplementären" Punkte, die durch Vertauschen von 0 und 1 entstehen (s. 2.3.5), bilden, jeweils ergänzt um die zusätzliche Koordinate 1, die Matrix $A_{2,4}^1$ im Beispiel 2.2.9 (S.28).

Die Kenntnis der aus den Filtern gebildeten Ordnung $\overline{\mathcal{I}}(P)$ zu einer partiellen Ordnung P läßt sich dazu nutzen, die Möglichkeiten der Erweiterung von P zu einer linearen Ordnung zu untersuchen. Nach Festlegen einer Indizierung $P = \{u_1, \dots, u_m\}$ parametrisiert die Menge

$$e(P) := \{\pi \in \mathfrak{S}_m : u_i \leq u_j \implies \pi^{-1}(i) \leq \pi^{-1}(j) \quad \forall i, j = 1 \dots m\}$$

für $\pi \in e(P)$ die linearen Erweiterungen $\{u_{\pi(1)} \prec_{\pi} \dots \prec_{\pi} u_{\pi(m)}\}$ mit

$$u_i \preceq_{\pi} u_j \iff \pi^{-1}(i) \leq \pi^{-1}(j)$$

der partiellen Ordnung P .

2.3.12 PROPOSITION

Es sei $P = \{u_1, \dots, u_m\}$ eine partielle Ordnung. Die Zuordnung

$$\pi \longmapsto C_P^{\pi} := \overline{\mathcal{I}}((P, \preceq_{\pi})) \subset \overline{\mathcal{I}}(P)$$

definiert eine Bijektion zwischen $e(P)$ und der Menge aller maximalen Filterketten von P , d.h. der maximalen Elemente in der partiellen Ordnung $\mathcal{C}(\overline{\mathcal{I}}(P))$ (s. 2.3.1).

Beweis. Die $m + 1$ Filter $I_{\nu} := \{u_i : \pi^{-1}(i) > m - \nu\}$, $\nu = 0 \dots m$, der linearen Ordnung (P, \preceq_{π}) zu $\pi \in e(P)$ bilden eine Kette, und da \preceq_{π} die partielle Ordnung \leq erweitert, gilt $\overline{\mathcal{I}}((P, \preceq_{\pi})) \subset \overline{\mathcal{I}}(P)$, so dass C_P^{π} jedenfalls eine maximale Kette in $\mathcal{C}(\overline{\mathcal{I}}(P))$ bildet.

Sei umgekehrt eine maximale Filterkette $C = \{I_0 \subsetneq \dots \subsetneq I_r\} \in \mathcal{C}(\overline{\mathcal{I}}(P))$ gegeben. In jeder der Mengen $I_{\nu} \setminus I_{\nu-1}$, $\nu = 1 \dots r$, kann man ein u mit $u \not\prec v$ für alle $v \in I_{\nu} \setminus I_{\nu-1}$ wählen und erhält $I := I_{\nu} \setminus \{u\} \in \overline{\mathcal{I}}(P)$, denn für $v \in I$ und $\tilde{v} > v$ gilt entweder $v \in I_{\nu-1}$ und $\tilde{v} \in I_{\nu-1} \subset I$ oder $v \in I_{\nu} \setminus I_{\nu-1}$ und $u \neq \tilde{v} \in I_{\nu}$, also jeweils $\tilde{v} \in I$. Wegen $I_{\nu-1} \subset I \subsetneq I_{\nu}$ folgt $I = I_{\nu-1}$ aus der Maximalität von C , also jeweils $|I_{\nu}| = |I_{\nu-1}| + 1$ und insbesondere $r = m$, $I_0 = \emptyset$ und $I_m = P$. Damit ist

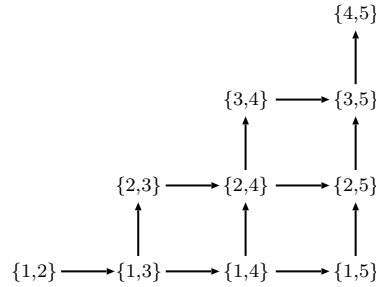
$\pi \in e(P)$ mit $\pi^{-1}(i) := m - \nu + 1$ für $\{u_i\} = I_\nu \setminus I_{\nu-1}$, $i = 1 \dots m$, denn aus $u_i \leq u_j$ mit $\{u_i\} = I_\nu \setminus I_{\nu-1}$ und $\{u_j\} = I_\mu \setminus I_{\mu-1}$ folgt $\mu \leq \nu$ wegen $u_j \in I_{\mu-1}$ für $\mu > \nu$, also $\pi^{-1}(i) \leq \pi^{-1}(j)$. Insbesondere ist $I_\nu = \{u_i: \pi^{-1}(i) > m - \nu\}$ für $\nu = 0 \dots m$, so dass $C = C_P^\pi$ folgt und eine Umkehrung definiert ist. \square

2.3.13 BEISPIEL

Es gibt 5 Möglichkeiten, die Elemente der partiellen Ordnung $2 \times (5 - 2)$, notiert mit ij für $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3$, so anzuordnen, dass die partielle Ordnung erhalten bleibt:

$$\begin{aligned} 11 < 12 < 13 < 21 < 22 < 23, \\ 11 < 12 < 21 < 13 < 22 < 23, \\ 11 < 13 < 21 < 12 < 22 < 23, \\ 11 < 12 < 22 < 13 < 21 < 23, \\ 11 < 13 < 22 < 12 < 21 < 23. \end{aligned}$$

Die 5 linearen Erweiterungen entsprechen mit 2.3.3 gemäß 2.3.12 den maximalen Ketten der mit 2.3.9 definierten partiellen Ordnung $\binom{5}{2}$, also den 5 verschiedenen Wegen, die in dem folgenden Diagramm jeweils in Pfeilrichtung von $\{1, 2\}$ nach $\{4, 5\}$ führen:



Die Anzahl der monotonen Pfade in einem aus m^2 Zellen bestehenden quadratischen Gitter, die keinen Punkt oberhalb der Hauptdiagonalen treffen, ist bekannt als die *Catalan-Zahl* C_m , die mit diversen Abzählproblemen in Zusammenhang steht (vgl.z.B. [Sta99]).

2.3.14 KOROLLAR

Die Anzahl der linearen Erweiterungen der partiellen Ordnung $2 \times (n - 2)$ ($n \geq 3$) ist die Catalan-Zahl

$$C_{n-2} = \frac{1}{n-1} \binom{2(n-2)}{n-2}.$$

2.4 Eine Basis für das torische Ideal $I_{k,n}$

Es wurde implizit bereits gelegentlich von der folgenden linearen Erweiterung der mit 2.3.9 definierten partiellen Ordnung $\binom{n}{k}$ Gebrauch gemacht.

2.4.1 DEFINITION

Es bezeichne \preceq die lexikographische Ordnung auf $\binom{n}{k}$, also die durch

$$\sigma \prec \tau : \iff \exists i \in \{1, \dots, k\} : \sigma_1 = \tau_1 \dots, \sigma_{i-1} = \tau_{i-1}, \sigma_i < \tau_i$$

für $\sigma = \{\sigma_1 < \dots < \sigma_k\}$ und $\tau = \{\tau_1 < \dots < \tau_k\}$ definierte lineare Ordnung. Entsprechend seien die freien Variablen p_σ im Polynomring $\mathbb{K}[\mathbf{p}] = \mathbb{K}[p_\sigma: \sigma \in \binom{n}{k}]$ durch

$$p_\sigma > p_\tau : \iff \sigma < \tau$$

geordnet.

Die Umkehrung der Ordnung auf den Variablen ist willkürlich, entspricht aber der üblichen Sichtweise $x_1 > \dots > x_m$ im Polynomring $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_m]$. Die Anordnung der Variablen ermöglicht es, den Polynomring $\mathbb{K}[\mathbf{p}]$ mit einer Termordnung zu versehen und Ideale durch Gröbner-Basen zu beschreiben. Einige elementare Begriffe dazu seien hier zitiert. Eine ausführliche Behandlung findet sich z.B. in [BW93].

2.4.2 DEFINITION+PROPOSITION

Es sei $\mathbb{K}[\mathbf{x}] = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_m]$ ein Polynomring mit Variablenordnung $x_1 > \dots > x_m$, und bezeichne \mathcal{M}_m die Halbgruppe der Monome über $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$. Eine Termordnung $>_t$ auf $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$ ist eine lineare Ordnung auf $\mathcal{M}_m = \mathbb{N}^m$ mit $\mathbf{u} >_t 0$ für alle $\mathbf{u} \in \mathbb{N}^m$ und

$$\mathbf{u} >_t \mathbf{v} \implies \mathbf{w} + \mathbf{u} >_t \mathbf{w} + \mathbf{v}$$

für alle $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{N}^m$. Jede Termordnung ist eine Wohlordnung und verfeinert die natürliche partielle Ordnung auf \mathbb{N}^m , die der Teilerrelation auf \mathcal{M}_m entspricht, d.h. es gilt stets

$$\mathbf{x}^{\mathbf{u}} \mid \mathbf{x}^{\mathbf{v}} \implies \mathbf{x}^{\mathbf{u}} \leq_t \mathbf{x}^{\mathbf{v}}.$$

- (i) Für ein Polynom $0 \neq f \in \mathbb{K}[\mathbf{x}]$ bezeichnet $\text{in}_t(f)$ das Initialmonom, also das Monom mit dem bzgl. $>_t$ maximalen Exponenten. Der Koeffizient des zugehörigen Terms von f heißt Initialkoeffizient. Das Ideal

$$\text{in}_t(I) := \langle \text{in}_t(f) : f \in I \rangle$$

zu einem Ideal I in $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$ heißt Initialideal von I bzgl. $<_t$. Die Monome, die nicht im Initialideal enthalten sind, werden Standardmonome genannt.

- (ii) Eine endliche Teilmenge $\mathcal{G} \subset \mathbb{K}[\mathbf{x}]$ mit $0 \notin \mathcal{G}$ heißt Gröbner-Basis von I bzgl. $>_t$, falls

$$\text{in}_t(I) = \langle \text{in}_t(f) : f \in \mathcal{G} \rangle.$$

Jede Gröbner-Basis erzeugt I als Ideal.

- (iii) Eine Gröbner-Basis \mathcal{G} für I bzgl. $>_t$ heißt reduziert, falls für alle $f \in \mathcal{G}$ der Initialkoeffizient 1 ist und keines der an f beteiligten Monome in dem Ideal $\langle \text{in}_t(g) : f \neq g \in \mathcal{G} \rangle$ enthalten ist. Zu jedem Ideal $I \neq 0$ gibt es bzgl. einer Termordnung eine eindeutig bestimmte reduzierte Gröbner-Basis.

2.4.3 DEFINITION

Die graduierte umgekehrt lexikographische Ordnung auf $\mathbb{K}[\mathbf{x}] = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_m]$ mit Variablenordnung $x_1 > \dots > x_m$ ist definiert durch

$$\mathbf{u} >_{dp} \mathbf{v} : \iff |\mathbf{u}| > |\mathbf{v}| \text{ oder } (|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}| \text{ und } \exists i \in \{1, \dots, m\} : u_m = v_m, \dots, u_{i+1} = v_{i+1}, u_i < v_i)$$

für $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)$, $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_m)$, wobei $|\mathbf{u}| = u_1 + \dots + u_m$.

Insbesondere gilt also für $0 \neq \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{N}^m$ mit $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}|$ und $\text{supp}(\mathbf{u}) \cap \text{supp}(\mathbf{v}) = \emptyset$ stets

$$\mathbf{u} >_{dp} \mathbf{v} \iff \max \text{supp}(\mathbf{u}) < \max \text{supp}(\mathbf{v}), \quad (2.4.4)$$

wobei $\text{supp}(\mathbf{u}) := \{i : u_i \neq 0\}$ für $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{N}^m$.

2.4.5 THEOREM

Die reduzierte Gröbner-Basis des torischen Ideals $I_{k,n}$ (s. 2.1.1, S.22) bzgl. $>_{dp}$ ist

$$\hat{\mathcal{G}}_{k,n} := \{p_\sigma p_\tau - p_{\sigma \wedge \tau} p_{\sigma \vee \tau} : \sigma \perp \tau \in \binom{[n]}{k}\}.$$

Der Beweis stützt sich auf die folgende Beobachtung, die den durch die Konfiguration $\mathcal{A}_{k,n}^1 \times \{1\}$ (s. 2.2.8, S.27) i.S.v. 2.2.2 definierten Halbgruppen-Homomorphismus

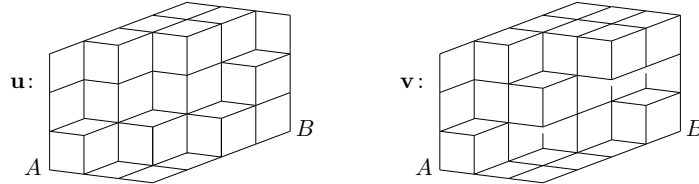
$$A_{k,n}^1 := \pi_{\mathcal{A}_{k,n}^1 \times \{1\}} : \mathbb{N}^{\binom{[n]}{k}} \longrightarrow \mathbb{Z}^{k \times (n-k)} \oplus \mathbb{Z}$$

betrifft.

2.4.6 LEMMA

Ist $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$ mit $A_{k,n}^1 \mathbf{u} = A_{k,n}^1 \mathbf{v}$, so enthält $\text{supp}(\mathbf{u})$ oder $\text{supp}(\mathbf{v})$ ein Paar σ, τ mit $\sigma \perp \tau$.

Beweis. Mit und 2.3.4 entspricht jeder Exponent \mathbf{u} mit $|\mathbf{u}| = d$ einer Familie $(I_\nu)_{\nu=1 \dots d}$ von Ordnungsidealen in $k \times (n-k)$, wobei jedes dieser Ideale als Teil des Gitters 2.3.6 durch einen Pfad i.S.v. 2.3.7 begrenzt wird. Die Aussage ist nun anschaulich klar, wenn man \mathbf{u} durch ein dreidimensionales Diagramm darstellt, indem man d Gitter übereinander anordnet. Beispielsweise erhält man für $k = 3$ und $n = 7$ mit $\mathbf{p}^{\mathbf{u}} = p_{135}p_{246}p_{247}$ und $\mathbf{p}^{\mathbf{v}} = p_{146}p_{237}p_{245}$ Diagramme der folgenden Form:



Der zu $u \in k \times (n-k)$ gehörige Koeffizient von $A_{k,n}^1 \mathbf{u}$ ist die Anzahl der Ideale I_ν mit $u \in I_\nu$, und $\text{supp}(\mathbf{u})$ enthält genau dann kein Paar $\sigma \perp \tau$, wenn die I_ν alle durch Inklusion vergleichbar sind, d.h. wenn \mathbf{u} durch ein Diagramm ohne Überhänge darstellbar ist. Dies kann für $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$ mit $A_{k,n}^1 \mathbf{u} = A_{k,n}^1 \mathbf{v}$ nicht für \mathbf{u} und \mathbf{v} zugleich der Fall sein. \square

Die Ausführung des Beweises von 2.4.5 wird nun von [GL96](Th. 4.2)¹ adaptiert.

Beweis von 2.4.5. Zunächst ist mit der Darstellung 2.3.10 des distributiven Verbandes $\binom{[n]}{k}$ klar, dass $\hat{\mathcal{G}}_{k,n}$ in $\mathfrak{J}_{k,n}$ enthalten ist. Für σ, τ gilt außerdem genau dann $p_\sigma p_\tau \neq p_{\sigma \wedge \tau} p_{\sigma \vee \tau}$, wenn $\sigma \perp \tau$. Wegen $\sigma \vee \tau \succ \sigma$ und $\tau \succ \sigma \wedge \tau$ für alle $\sigma \perp \tau$ gilt nach (2.4.4) außerdem für $\sigma \perp \tau$ immer $p_\sigma p_\tau >_{dp} p_{\sigma \wedge \tau} p_{\sigma \vee \tau}$. $\hat{\mathcal{G}}_{k,n}$ ist also eine Gröbner-Basis, wenn es zu jedem $0 \neq f \in I_{k,n}$ ein Paar σ, τ mit $\sigma \perp \tau$ gibt, so dass

¹[GL96] sortiert die Variablen p_σ in umgekehrter Reihenfolge und erhält daher ein entsprechendes Ergebnis für die lexikographische Termordnung.

$p_\sigma p_\tau \mid \text{in}_{dp}(f)$. Dies folgt aus Lemma 2.4.6, sobald $\text{in}_{dp}(f) = \text{in}_{dp}(\mathbf{p}^{\mathbf{u}} - \mathbf{p}^{\mathbf{v}})$ für ein $\mathbf{p}^{\mathbf{u}} - \mathbf{p}^{\mathbf{v}}$ mit $A_{k,n}^1 \mathbf{u} = A_{k,n}^1 \mathbf{v}$. Nach 2.2.2(i) hat f eine Darstellung

$$f = \sum_{i=1}^s c_i (\mathbf{p}^{\mathbf{u}^i} - \mathbf{p}^{\mathbf{v}^i}), \quad 0 \neq c_i \in \mathbb{K}, \quad A_{k,n}^1 \mathbf{u}^i = A_{k,n}^1 \mathbf{v}^i \text{ für } i = 1 \dots s,$$

und man kann $s \geq 1$ mit dieser Eigenschaft minimal wählen. Angenommen, in der resultierenden Darstellung

$$f = \sum_{i=1}^s a_i \mathbf{p}^{\mathbf{u}^i} + \sum_{i=1}^s b_i \mathbf{p}^{\mathbf{v}^i}, \quad a_i, b_i \in \mathbb{K} \text{ für } i = 1 \dots s$$

ist $a_i = 0$ für ein $i \in \{1, \dots, s\}$. Dann ist entweder $c_i = c_j$ und $\mathbf{u}^i = \mathbf{v}^j$ oder $c_i = -c_j$ und $\mathbf{u}^i = \mathbf{u}^j$ für ein $j \neq i$, also

$$\begin{aligned} c_i (\mathbf{p}^{\mathbf{u}^i} - \mathbf{p}^{\mathbf{v}^i}) + c_j (\mathbf{p}^{\mathbf{u}^j} - \mathbf{p}^{\mathbf{v}^j}) &= c_i (\mathbf{p}^{\mathbf{u}^i} - \mathbf{p}^{\mathbf{v}^i}) \text{ oder} \\ c_i (\mathbf{p}^{\mathbf{u}^i} - \mathbf{p}^{\mathbf{v}^i}) + c_j (\mathbf{p}^{\mathbf{u}^j} - \mathbf{p}^{\mathbf{v}^j}) &= c_i (\mathbf{p}^{\mathbf{v}^j} - \mathbf{p}^{\mathbf{u}^i}), \end{aligned}$$

was jeweils der Minimalität von s widerspricht. Also ist $a_i \neq 0$ und analog auch $b_i \neq 0$ für $i = 1 \dots s$, und daher $\text{in}_{dp}(f) = \text{in}_{dp}(\mathbf{p}^{\mathbf{u}^i} - \mathbf{p}^{\mathbf{v}^j})$ für ein i und $\hat{\mathcal{G}}_{k,n}$ eine Gröbner-Basis. Dass $\hat{\mathcal{G}}_{k,n}$ reduziert ist, ist klar. \square

2.4.7 KOROLLAR

Das Initialideal des torischen Ideals $I_{k,n}$ bzgl. der graduierten umgekehrt lexikographischen Ordnung ist das quadratfreie Monomideal

$$\text{in}_{dp}(I_{k,n}) = \langle p_\sigma p_\tau : \sigma \perp \tau \in \binom{[n]}{k} \rangle.$$

Allgemein entsprechen die quadratfreien Monomideale im Polynomring $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_m]$ den Simplicialkomplexen auf der Indexmenge $S = \{1, \dots, m\}$ (vgl. z.B. [MS04], Th.1.7). Einem Simplicialkomplex Δ ordnet man dabei das *Stanley-Reisner-Ideal*

$$I_\Delta := \langle x_{i_1} \cdots x_{i_t} : \{i_1, \dots, i_t\} \notin \Delta \rangle$$

zu, dessen minimale Erzeugermenge aus den Monomen $x_{i_1} \cdots x_{i_t}$ zu den minimalen Nicht-Seiten $H = \{i_1, \dots, i_t\}$ von Δ besteht, d.h. den Teilmengen $H \subset S$ mit $H \notin \Delta$, so dass $F \in \Delta$ für jede echte Teilmenge F von H gilt. Speziell bilden also stets die Ketten über einer endlichen partiellen Ordnung P einen Simplicialkomplex $\Delta_P := \mathcal{C}(P)$ mit Stanley-Reisner-Ideal

$$I_{\Delta_P} = \langle x_u x_v : u, v \in P, u \not\leq v \text{ und } v \not\leq u \rangle \subset \mathbb{K}[x_u : u \in P].$$

Bezüglich eines beliebigen Ideals und einer Termordnung nennt man den Simplicialkomplex, dessen Stanley-Reisner-Ideal das Radikal des Initialideals bildet, den zugehörigen *Initialkomplex*.

2.4.8 KOROLLAR+DEFINITION

Der Initialkomplex zum torischen Ideal $I_{k,n}$ bzgl. der umgekehrt graduierten lexikographischen Ordnung ist der Kettenverband

$$\Delta_{k,n} := \mathcal{C}\left(\binom{[n]}{k}\right) = \mathcal{C}(\overline{\mathcal{I}}(k \times (n-k))).$$

Die Facetten des Komplexes $\Delta_{k,n}$ sind die maximalen Filterketten über der partiellen Ordnung $\binom{n}{k}$, die mit 2.3.12 den linearen Erweiterungen von $k \times (n-k)$ entsprechen. Eine allgemeine Formel für ihre Anzahl liegt nicht unmittelbar auf der Hand und wird in 2.6 angegeben, während sich die Anzahl der minimalen Nicht-Seiten des Komplexes $\Delta_{k,n}$ leicht bestimmen läßt.

2.4.9 PROPOSITION

Die Anzahl der Paare (σ, τ) mit $\sigma, \tau \in \binom{n}{k}$ und $\sigma \not\leq \tau$ ist $\binom{n}{k-1} \binom{n}{k+1}$.

Beweis. Zu einem Paar von zwei Mengen $\{a_1, \dots, a_{k-1}\}$ und $\{b_1, \dots, b_{k+1}\}$ mit $1 \leq a_1 < \dots < a_{k-1} \leq n$ und $1 \leq b_1 < \dots < b_{k+1} \leq n$ sei $r \in \{1, \dots, k-1\}$ der kleinste Index mit $b_r > a_r$, falls so ein r existiert, und $r = k$ sonst. Dann ist $\sigma, \tau \in \binom{n}{k}$ mit

$$\sigma := \{b_1, \dots, b_{r-1}, a_{r+1}, \dots, a_{k+1}\} \quad \text{und} \quad \tau := \{a_1, \dots, a_r, b_r, \dots, b_{k-1}\},$$

denn es gilt $r = 1$ oder $b_{r-1} < a_{r+1}$, da $r > 1$ und $b_{r-1} \geq a_{r+1} > a_{r-1}$ im Widerspruch zur Wahl von r stünde. Nach Umbenennung mit $\sigma = \{\sigma_1 < \dots < \sigma_k\}$ und $\tau = \{\tau_1 < \dots < \tau_k\}$ ist insbesondere $\sigma_i = b_i \leq a_i = \tau_i$ für alle $i < r$ und $\sigma_r = a_{r+1} > a_r = \tau_r$, d.h. man findet r umgekehrt in σ, τ mit $\sigma \not\leq \tau$ als den kleinsten Index mit $\sigma_r > \tau_r$ wieder, so dass eine Umkehrung definiert und somit eine Bijektion zwischen den fraglichen Mengen erklärt ist. \square

Da die lexikographische Ordnung \prec eine lineare Erweiterung der partiellen Ordnung $<$ auf $\binom{n}{k}$ ist, ist die Menge aller Paare (σ, τ) mit $\tau \prec \sigma$ in der Menge aller Paare (σ, τ) mit $\sigma \not\leq \tau$ enthalten, und die Differenz beider Mengen parametrisiert die quadratischen Monome $p_\sigma p_\tau$ mit $\sigma \perp \tau$.

2.4.10 KOROLLAR

Die minimale Anzahl von Erzeugern des Ideals $I_{k,n}$ ist

$$|\hat{\mathcal{G}}_{k,n}| = \binom{n}{k-1} \binom{n}{k+1} - \binom{\binom{n}{k}}{2}.$$

2.4.11 BEMERKUNG

Wie man der Argumentation entnimmt, wird für die Aussagen in diesem Abschnitt nur benutzt, dass die lexikographische Ordnung \prec auf $\binom{n}{k}$ eine lineare Erweiterung der partiellen Ordnung $<$ bildet, so dass man die selben Ergebnisse auch mit jeder anderen Anordnung der Variablen des Polynomrings $\mathbb{K}[\mathbf{p}]$ erhält, sofern sie die partielle Ordnung $<$ erweitert.

2.5 Das Ordnungspolytop $\mathcal{P}_{k \times (n-k)}$

Es soll nun gezeigt werden, dass mit $X(k, n)$ tatsächlich eine Torische Varietät i.S.v. 1.3.4 (S.17) vorliegt. Außerdem soll die beschriebene Konstruktion zu der Torischen Varietät $P(k, n)$ in [BCKS98] in Beziehung gesetzt werden.

Die Charakterisierung 2.3.5 (S.29) der Konfiguration $\overline{\mathcal{A}}_{k,n}^1$ durch die Filter der partiellen Ordnung $k \times (n-k)$ besagt, dass die konvexe Hülle darüber ein sogenanntes Ordnungspolytop bildet. Der Begriff des Ordnungspolytops und die hier erwähnten Eigenschaften werden bei [Sta86] diskutiert. Als Referenz zur Theorie der konvexen Polytope dient [Grü67].

2.5.1 DEFINITION

Es sei (P, \leq) eine endliche partielle Ordnung mit Indizierung $P = \{u_1, \dots, u_m\}$. Das Ordnungspolytop zu P ist das konvexe Polytop $\mathcal{P}_{(P, \leq)} \subset \mathbb{R}^P$ (bzw. \mathcal{P}_P , falls keine Verwechslungsgefahr besteht) mit

$$\mathcal{P}_P := \{(x_u)_{u \in P} \in [0, 1]^P : u \leq v \implies x_u \leq x_v \ \forall u, v \in P\}.$$

2.5.2 PROPOSITION

Es sei $P = \{u_1, \dots, u_m\}$ eine partielle Ordnung. Die Ecken des Ordnungspolytops \mathcal{P}_P sind die Punkte der Konfiguration

$$\mathcal{A}_P := \{0, 1\}^P \cap \mathcal{P}_P = \{\chi(I) : I \in \overline{\mathcal{I}}(P)\} \subset \mathbb{Z}^P.$$

Die Menge $\mathcal{C}(\overline{\mathcal{I}}(P))$ aller Filterketten über P bildet außerdem eine Triangulierung der Konfiguration \mathcal{A}_P , also einen Simplicialkomplex, dessen Facetten die durch die linearen Erweiterungen $e(P) \subset \mathfrak{S}_m$ von P parametrisierten maximalen Filterketten

$$C_P^\pi = \overline{\mathcal{I}}((P, \preceq_\pi))$$

für $\pi \in e(P)$ (s. 2.3.12, S.31) sind. Dies bedeutet folgendes:

- (i) Für $\pi \in e(P)$ ist das Ordnungspolytop $\mathcal{P}_P^\pi := \mathcal{P}_{(P, \preceq_\pi)}$ zur linearen Erweiterung \preceq_π ein m -Simplex über den $m + 1$ Ecken in $\mathcal{A}_P^\pi := \mathcal{A}_{(P, \preceq_\pi)}$.
- (ii) $\mathcal{P}_P = \bigcup_{\pi \in e(P)} \mathcal{P}_P^\pi$.
- (iii) Für $\pi \neq \tilde{\pi} \in e(P)$ ist $\mathcal{P}_P^\pi \cap \mathcal{P}_P^{\tilde{\pi}}$ eine gemeinsame Seite von \mathcal{P}_P^π und $\mathcal{P}_P^{\tilde{\pi}}$.

Beweis. Zunächst ist klar, dass die 0/1-Vektoren in \mathcal{P}_P genau die charakteristischen Vektoren zu den Filtern in P sind. Wegen $\mathcal{P}_P \subset [0, 1]^P$ können dies auch nur Ecken an \mathcal{P}_P sein.

Für $\pi \in e(P)$ definiert die lineare Ordnung \preceq_π einen Isomorphismus $\mathbb{R}^P \cong \mathbb{R}^m$, so dass die Punkte $\chi(I)$ für $\emptyset \neq I \in C_P^\pi$ entsprechend der Kette sortiert eine $m \times m$ -Matrix (a_{ij}) mit $a_{ij} = 1$ für $i \geq j$ und $a_{ij} = 0$ für $i < j$ bilden. Damit ist klar, dass \mathcal{P}_P^π ein m -Simplex ist, dessen Seiten den Teilmengen von \mathcal{A}_P^π entsprechen, womit (i) gezeigt ist. Da (ii) klar ist, folgt daraus auch, dass alle Ecken von \mathcal{P}_P in \mathcal{A}_P enthalten sind. Die Punkte im Schnitt zweier Simplexe \mathcal{P}_P^π und $\mathcal{P}_P^{\tilde{\pi}}$ sind genau die Punkte in \mathcal{P}_P , die in dem von π und $\tilde{\pi}$ bestimmten Hyperebenenschnitt liegen, sie bilden also eine Seite an \mathcal{P}_P^π und $\mathcal{P}_P^{\tilde{\pi}}$, womit auch (iii) klar ist. \square

2.5.3 KOROLLAR

Die konvexe Hülle über der Konfiguration $\overline{\mathcal{A}}_{k,n}^1$ ist das Ordnungspolytop $\mathcal{P}_{k \times (n-k)}$. Die zugehörige Triangulierung ist der Initialkomplex $\Delta_{k,n}$ des torischen Ideals $I_{k,n}$ bzgl. der umgekehrt graduierten lexikographischen Termordnung (s. 2.4.8).

Der Initialkomplex Δ_t zu einer Termordnung t und einem torischen Ideal $I_{\mathcal{A}}$, das aus einer Konfiguration $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\} \subset \mathbb{Z}^d$ resultiert, ist immer auch eine reguläre Triangulierung der Konfiguration \mathcal{A} , d.h. es gibt einen Vektor $\omega \in \mathbb{R}^m$, so dass die mit ω in eine höhere Dimension geliftete Konfiguration

$$\hat{\mathcal{A}} := \{(\mathbf{a}_i, \omega_i) : \mathbf{a}_i \in \mathcal{A}\} \subset \mathbb{R}^{d+1}$$

durch Projektion auf die ersten d Koordinaten die Triangulierung Δ_t induziert. (vgl. [Stu95], Lec.8, insbes. Th.8.3).

Man kann die Triangulierung der Konfiguration $\overline{\mathcal{A}}_{k,n}^1$ auch als eine Triangulierung der graduierten Konfiguration $\overline{\mathcal{A}}_{k,n}^1 \times \{1\}$ betrachten, und als solche ist sie nicht nur regulär, sondern auch unimodular, d.h. jeder der beteiligten Simplizes hat das Volumen 1. Dies ist klar, da das Volumen jeweils der Betrag der Determinante einer Matrix ist, deren Zeilen sich zu einer Dreiecksmatrix mit 1en in der Diagonalen sortieren lassen.

2.5.4 KOROLLAR

Folgende Zahlen stimmen überein:

- (i) Die Anzahl der linearen Erweiterungen der partiellen Ordnung $k \times (n-k)$.
- (ii) Die Anzahl der maximalen Ketten in der partiellen Ordnung $\binom{n}{k}$.
- (iii) Das Volumen des Polytops $\text{conv}(\overline{\mathcal{A}}_{k,n}^1 \times \{1\})$.
- (iv) Der Grad der projektiven Varietät $X(k, n)$.

Die Übereinstimmung von (i) und (ii) wurde in 2.3.12 festgestellt, und mit 2.5.2 ist dies die Anzahl der Einheits-Simplizes, in die sich $\text{conv}(\overline{\mathcal{A}}_{k,n}^1 \times \{1\})$ unter $\Delta_{k,n}$ zerlegt. Der Grad der projektiven Varietät $X(k, n)$ ist das $k(n-k)!$ -fache des Leitkoeffizienten des *Hilbert-Polynoms*

$$h_{X(k,n)}(m) = \dim_{\mathbb{K}} H^0(X(k, n), \mathcal{O}_{X(k,n)}(m)) \quad (m \in \mathbb{N}),$$

dessen Übereinstimmung mit (iii) in [Stu95](Th.4.16) gezeigt wird.

Wie [Stu95](Prop. 13.15) bemerkt, folgt aus der Unimodularität der regulären Triangulierung einer graduierten Konfiguration außerdem, dass die zugehörige Torische Varietät projektiv normal ist¹: die aus den Simplizes der Triangulierung gewonnenen Matrizen sind mit Determinanten ± 1 invertierbar über \mathbb{Z} , so dass jeder in $\text{pos}(\mathcal{A}) \cap \mathbb{Z}\mathcal{A}$ enthaltene Vektor in seinem Kegel eine eindeutige Darstellung hat und daher in $\mathbb{N}\mathcal{A}$ liegt.

2.5.5 KOROLLAR

Die Varietät $X(k, n)$ ist projektiv normal. Insbesondere ist $X(k, n)$ eine Torische Varietät i.S.v. 1.3.4.

Ein durch seine Eckpunkte definiertes konvexes Polytop hat eine alternative Beschreibung als System von Ungleichungen, bzw. als Durchschnitt von Halbräumen. Insbesondere ergibt sich diese Beschreibung für ein Ordnungspolytop direkt aus der zugrundeliegenden partiellen Ordnung. Für $u, v \in k \times (n-k)$ sei

$$u \triangleleft v : \iff u < v \text{ und es gibt kein } w \text{ mit } u < w < v,$$

also $(i, j) \triangleleft (\nu, \mu)$ genau dann, wenn entweder $\nu = i + 1$ oder $\mu = j + 1$. Die Menge

$$Q_1 := \{(u, v) : u \triangleleft v \in k \times (n-k)\} \cup \{(\mathbf{0}, (1, 1)), ((k, n-k), \mathbf{1})\}$$

¹[Stu95] zeigt, dass bereits die Existenz einer Termordnung mit quadratfreiem Initialideal die projektive Normalität impliziert.

ist die kleinste Relation auf der Menge $(k \times (n-k)) \cup \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$, deren transitiven Abschluss die partielle Ordnung $k \times (n-k)$, erweitert um $\mathbf{0} \prec (1, 1)$ und $(k, n-k) \prec \mathbf{1}$, bildet. Für $\rho = (u, v) \in Q_1$ bezeichne \mathcal{H}_ρ die Hyperebene in $\mathbb{R}^{k \times (n-k)}$, die den durch die zugehörige Ungleichung definierten Halbraum begrenzt, d.h.

$$\mathcal{H}_\rho := \begin{cases} \{x_{1,1} = 0\}, & \text{falls } u = \mathbf{0}, \\ \{x_{k,n-k} = 1\}, & \text{falls } v = \mathbf{1}, \\ \{x_u = x_v\}, & \text{falls } u \prec v \in k \times (n-k), \end{cases} \quad (2.5.6)$$

bzw., unter der Einbettung in den Raum $\mathbb{R}\{\mathbf{0}\} \oplus \mathbb{R}^{k \times (n-k)} \oplus \mathbb{R}\{\mathbf{1}\} \cong \mathbb{R}^{k(n-k)+2}$:

$$\mathcal{H}_\rho = \{x_{\mathbf{0}} = 0\} \cap \{x_{\mathbf{1}} = 1\} \cap \{x_u = x_v\}.$$

Da die durch Q_1 parametrisierten Ungleichungen voneinander unabhängig sind, erhält man direkt:

2.5.7 PROPOSITION

Die Facetten des Ordnungspolytops $\mathcal{P}_{k \times (n-k)}$ sind die Polytope

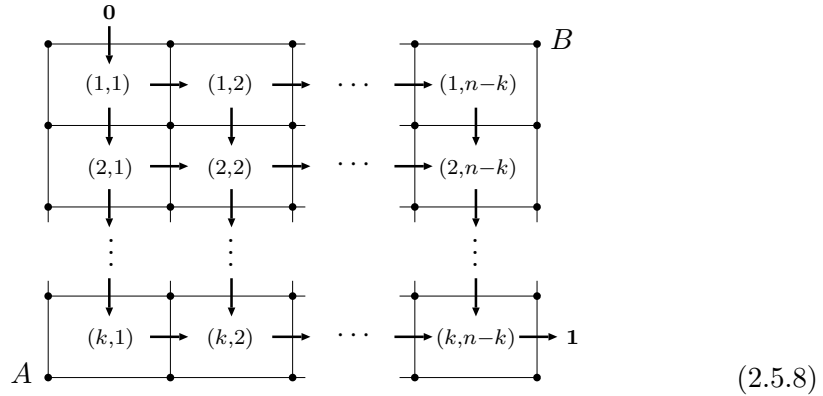
$$\mathcal{F}_\rho := \mathcal{H}_\rho \cap \mathcal{P}_{k \times (n-k)}$$

für $\rho \in Q_1$.

Die Menge Q_1 enthält die Kanten eines gerichteten Graphen $Q_{k,n} := (Q_0, Q_1)$ mit Eckenmenge

$$Q_0 := (k \times (n-k)) \cup \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\},$$

der zusammen mit dem Gitter 2.3.6 (S.30) in folgender Weise ein Diagramm bildet:



Insbesondere kreuzen also die gerichteten Kanten $\rho \in Q_1$ jeweils genau eine von

$$|Q_1| = \underbrace{k(n-k-1) + 1}_{\text{vertikal}} + \underbrace{(k-1)(n-k) + 1}_{\text{horizontal}} = 2(k-1)(n-k-1) + n$$

Gitterkanten. Eine allgemeinere Form des Diagramms 2.5.8 wird in [BCKS98] untersucht.

2.5.9 LEMMA

Es sei für $\sigma \in \binom{n}{k}$ mit $Q_1(\sigma)$ die Menge aller gerichteten Kanten $\rho \in Q_1$ bezeichnet, die den Pfad $\Pi(\sigma)$ (2.3.7) im Diagramm 2.5.8 kreuzen, also

$$Q_1(\sigma) = \begin{cases} \{((k, n-k), \mathbf{1})\}, & \text{falls } \sigma = \{1, \dots, k\}, \\ \{(\mathbf{0}, (1, 1))\}, & \text{falls } \sigma = \{n-k+1, \dots, n\}, \\ \{(u, v) : u \in \mathcal{I}(\sigma), v \in \overline{\mathcal{I}}(\sigma)\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die in einer Facette \mathcal{F}_ρ an $\mathcal{P}_{k \times (n-k)}$ enthaltenen Ecken sind die Punkte

$$\overline{\mathcal{A}}_{k,n}^1 \cap \mathcal{F}_\rho = \{\chi(\sigma) : \rho \notin Q_1(\sigma)\}.$$

Die Beobachtung 2.5.9 bedarf keines Beweises. Man erhält also eine Facetten-Ecken-Inzidenztabelle des Ordnungspolytops, indem man zu jeder Ecke $\chi(\sigma)$ die Kanten $\rho \in Q_1$ notiert, die der Pfad $\Pi(\sigma)$ kreuzt. Die zugehörigen Facetten \mathcal{F}_ρ sind dann genau diejenigen Facetten, die nicht mit $\chi(\sigma)$ inzident sind.

Das System $Q_{k,n} = (Q_0, Q_1)$ ist ein *Köcher* ohne gerichtete Zyklen¹, oder auch ein Netzwerk mit Quelle $\mathbf{0}$ und Senke $\mathbf{1}$. Die Inzidenzmatrix zum gerichteten Graphen $Q_{k,n}$ stellt die Randabbildung im Kettenkomplex $\Delta_{k,n}$ als Homomorphismus

$$I_{Q_{k,n}} : \mathbb{Z}^{Q_1} \longrightarrow \mathbb{Z}^{Q_0}, \quad e_\rho \longmapsto \varepsilon_{h(\rho)} - \varepsilon_{t(\rho)},$$

von freien abelschen Gruppen dar, wobei e_ρ für $\rho \in Q_1$ und ε_u für $u \in Q_0$ jeweils die Elemente der Standardbasen bezeichnen, und die Funktionen $h, t : Q_1 \longrightarrow Q_0$, einer gerichteten Kante ρ jeweils *head* und *tail* zuordnen, also $h(\rho) = v$ und $t(\rho) = u$ für $\rho = (u, v) \in Q_1$. Insbesondere gilt also

$$I_{Q_{k,n}}(e_{\rho_1} + \dots + e_{\rho_s}) = \varepsilon_{h(\rho_s)} - \varepsilon_{t(\rho_1)}$$

für jeden gerichteten Weg (ρ_1, \dots, ρ_s) in $Q_{k,n}$, so dass die Komposition $\partial_{k,n} := \pi_{\mathbf{0}} \circ I_{Q_{k,n}}$ surjektiv ist, wobei $\pi_{\mathbf{0}}$ als natürliche Projektion durch die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} = \mathbb{Z}\{\mathbf{0}\} \longrightarrow \mathbb{Z}^{Q_0} \xrightarrow{\pi_{\mathbf{0}}} N' := \mathbb{Z}^{k \times (n-k)} \oplus \mathbb{Z}\{\mathbf{1}\} \longrightarrow 0$$

definiert ist. Da man jeden Punkt $u \in k \times (n-k)$ durch einen gerichteten Weg in Q_1 von $\mathbf{0}$ aus erreichen kann, ist sogar $\pi_I \circ \partial_{k,n}$ für jedes Ordnungsideal $I \in \mathcal{I}(k \times (n-k))$ mit der entsprechenden Projektion $\pi_I : N' \rightarrow \mathbb{Z}^I$ surjektiv. Mit M' als dualer Gruppe zu $N' = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M', \mathbb{Z})$ bedeutet die Surjektivität

$$\pi_{k \times (n-k)} \circ \partial_{k,n} : \mathbb{Z}^{Q_1} \longrightarrow N \cong \mathbb{Z}^{k \times (n-k)}, \quad (2.5.10)$$

dass $N_{\mathbb{R}}$ als \mathbb{R} -Vektorraum von den Normalen $n_\rho := \pi_{k \times (n-k)} \circ \partial_{k,n}(e_\rho)$ auf den Facetten \mathcal{F}_ρ an $\mathcal{P}_{k \times (n-k)}$ erzeugt wird. Das sind die Vektoren $n_\rho \in N$ mit

$$n_\rho := \begin{cases} \varepsilon_{1,1}, & \text{falls } t(\rho) = \mathbf{0}, \\ -\varepsilon_{k,n-k}, & \text{falls } h(\rho) = \mathbf{1}, \\ \varepsilon_{h(\rho)} - \varepsilon_{t(\rho)}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

¹vgl.z.B. [Hil03]

Dies sind die *primitiven Elemente* des Normalenfächers $\Sigma_{k,n}$ in $N_{\mathbb{R}}$ über $\mathcal{P}_{k \times (n-k)}$, wobei

$$\mathcal{P}_{k \times (n-k)} = \bigcap_{\rho \in Q_1} \{m \in M_{\mathbb{R}} : \langle m, n_{\rho} \rangle \geq a_{\rho}\} \quad (2.5.11)$$

mit geeigneten $a_{\rho} \in \mathbb{Z}$, hier also $a_{\rho} = 1$ für $h(\rho) = \mathbf{1}$ und $a_{\rho} = 0$ sonst. $\Sigma(k, n)$ besteht aus den Normalenkegeln

$$\mathcal{N}(F) = \{u \in N_{\mathbb{R}} : \langle m, u \rangle \geq 0 \forall m \in \mathcal{P}_{k \times (n-k)}, \langle m, u \rangle = 0 \forall m \in F\}$$

zu den Seiten F an $\mathcal{P}_{k \times (n-k)}$, und bildet einen vollständigen rationalen polyedrischen Fächer i.S.v. 1.3.4 (S.17), aus dem eine $k(n-k)$ -dimensionale projektive Torische Varietät $X_{\Sigma(k,n)}$ hervorgeht¹. Der Normalenfächer ist kombinatorisch dual zum Polytop, wobei insbesondere die Kanten in $\Sigma(k, n)$ von den primitiven Elementen n_{ρ} erzeugt werden und die Ecken des Polytops die maximalen Kegel in $\Sigma(k, n)$ und damit eine Überdeckung von $X_{\Sigma(k,n)}$ durch affine Torische Varietäten indizieren. Die folgende Beobachtung zeigt, dass jeweils der affine Koordinatenring $\mathbb{K}[c_{\sigma}^{\vee} \cap M]$ zu einem maximalen Kegel c_{σ} in $\Sigma(k, n)$ als Halbgruppenalgebra mit dem Koordinatenring der affinen Torischen Varietät zur lokalen Konfiguration $\overline{\mathcal{A}}_{k,n}^1 - \chi(\sigma)$ übereinstimmt, und aus der Diskussion in [Stu95] (Lec.13, insbes. L.13.8) geht hervor, dass daraus die Isomorphie beider Varietäten in ihrer Einbettung in $\mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1}$ folgt.

2.5.12 PROPOSITION

Für $\sigma \in \binom{n}{k}$ wird die Halbgruppe $c_{\sigma}^{\vee} \cap M$ von der Menge

$$\overline{\mathcal{A}}_{k,n}^1 - \chi(\sigma) := \{\chi(\tau) - \chi(\sigma) : \chi(\tau) \in \overline{\mathcal{A}}_{k,n}^1\}$$

erzeugt, wobei $c_{\sigma} := \mathcal{N}(\chi(\sigma))$ den $k(n-k)$ -dimensionalen Normalenkegel über der Ecke $\chi(\sigma)$ an $\mathcal{P}_{k \times (n-k)}$ bezeichnet.

Beweis. Es sei $(a(u, \tau))_{u, \tau}$ die aus $\overline{\mathcal{A}}_{k,n}^1 - \chi(\sigma)$ gebildete Matrix, also

$$a(u, \tau) = \begin{cases} +1, & \text{falls } u \in \overline{\mathcal{I}}(\tau) \setminus \overline{\mathcal{I}}(\sigma), \\ -1, & \text{falls } u \in \overline{\mathcal{I}}(\sigma) \setminus \overline{\mathcal{I}}(\tau), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (u \in k \times (n-k), \tau \in \binom{n}{k})$$

Zu zeigen ist, dass sich $z \in c_{\sigma}^{\vee} \cap \mathbb{Z}^{k \times (n-k)}$ aus dieser Matrix mit Koeffizienten in \mathbb{N} darstellen läßt. Der Kegel c_{σ} wird von den primitiven Elementen n_{ρ} zu den Facetten \mathcal{F}_{ρ} an $\mathcal{P}_{k \times (n-k)}$ erzeugt, die mit der Ecke $\chi(\sigma)$ inzident sind. Mit 2.5.9 bedeutet $z = (z_u)_u \in c_{\sigma}^{\vee}$ daher $z_u \leq z_v$ für alle $(u, v) \notin Q_1^{k,n}(\sigma)$ mit $u < v \in k \times (n-k)$ und außerdem $z_{(1,1)} \geq 0$ falls $\sigma \neq \{n-k+1, \dots, n\}$ und $z_{(k,n-k)} \leq 0$ falls $\sigma \neq \{1, \dots, k\}$. Daraus folgt

$$z_u \begin{cases} \geq 0 & \text{für } u \in \overline{\mathcal{I}}(\sigma) \\ \leq 0 & \text{für } u \notin \overline{\mathcal{I}}(\sigma) \end{cases} .$$

Es bezeichne \prec die zeilenweise lineare Erweiterung der partiellen Ordnung $k \times (n-k)$:

¹Ein d -dimensionales konvexes Polytop in \mathbb{R}^d mit Ecken in \mathbb{Z}^d definiert durch seinen Normalenfächer immer eine d -dimensionale projektive Torische Varietät. ([Cox03], Lec.12).

$$(i, j) \prec (\nu, \mu) : \iff i < \nu \text{ oder } (i = \nu \text{ und } j < \mu).$$

Für $u \notin \bar{\mathcal{I}}(\sigma)$ sei $\tau(u) \in \binom{n}{k}$ der Index zum Filter $\{v: u \preceq v\}$. Man erhält

$$a(v, \tau(u)) = \begin{cases} 1, & \text{falls } v \succeq u \text{ und } v \notin \bar{\mathcal{I}}(\sigma), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (v \in k \times (n-k))$$

Analog ergibt sich für $u \in \bar{\mathcal{I}}(\sigma)$ mit $\tau(u)$ zum Filter $\{v: u \prec v\}$ auch $a(v, \tau(u)) = -1$ für alle v mit $u \succeq v \in \bar{\mathcal{I}}(\sigma)$ und $a(v, \tau(u)) = 0$ sonst. Zerlegt man also die Matrix $(a(u, \tau))_{u, \tau}$ in die Zeilen zu $u \in \bar{\mathcal{I}}(\sigma)$ einerseits und die zu $u \notin \bar{\mathcal{I}}(\sigma)$ andererseits, so erhält man durch Anordnung der Zeilen entsprechend \prec innerhalb der beiden Teile und geeignete Anordnung der Spalten $\tau(u)$ mit $m := |\bar{\mathcal{I}}(\sigma)|$ eine quadratische Untermatrix $b(i, j)_{i, j}$ mit

$$b(i, j) = \begin{cases} -1, & \text{falls } i \leq j \leq m, \\ +1, & \text{falls } j \geq i > m, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (i, j = 1 \dots k(n-k))$$

Damit existiert eine Lösung in $\mathbb{N}^{\binom{n}{k}}$ für das fragliche Gleichungssystem. \square

2.5.13 KOROLLAR

Die Torischen Varietäten $X(k, n) = \text{Proj } \mathbb{K}[\mathbf{p}]/I_{k, n}$ und $X_{\Sigma(k, n)}$ stimmen überein.

$X_{\Sigma(k, n)}$ ist die Torische Varietät $P(k, n)$, die in [BCKS98] untersucht wird, wo auch explizit die Isomorphie zu $X(k, n)$ nachgewiesen wird (Th.3.2.13).

2.5.14 BEMERKUNG

Die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow Z \longrightarrow \mathbb{Z}^{Q_1} \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

mit $Z := \ker(\pi_{k \times (n-k)} \circ \partial_{k, n}) \subset \mathbb{Z}^{Q_1}$ (s. 2.5.10) induziert eine exakte Sequenz

$$1 \longrightarrow T \longrightarrow \mathbb{T}^{Q_1} \longrightarrow \mathbb{T}^{k \times (n-k)} \longrightarrow 1,$$

wobei hier die Identität $\mathbb{T}^{Q_1} = \mathbb{Z}^{Q_1} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{K}^*$ zugrunde gelegt ist, so dass sich insbesondere $(x \otimes t) \in \mathbb{T}^{k \times (n-k)} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{K}^*$ als Gruppenhomomorphismus $M \rightarrow \mathbb{K}^*$ mit $m \mapsto t^{\langle m, x \rangle}$ schreiben läßt, womit die induzierte Abbildung $\mathbb{T}^{Q_1} \rightarrow \mathbb{T}^{k \times (n-k)}$ sich in der Form

$$(\mu_\rho)_\rho \mapsto \left(\prod_{\rho} \mu_\rho^{\langle \varepsilon_u, n_\rho \rangle} \right)_u = \left(\left(\prod_{h(\rho)=u} \mu_\rho \right) \left(\prod_{t(\rho)=u} \mu_\rho \right)^{-1} \right)_u$$

darstellt, und man als Kern die Untergruppe

$$T = \left\{ (\mu_\rho)_\rho: \prod_{\rho} \mu_\rho^{\langle m, n_\rho \rangle} = 1 \ \forall m \in M \right\} \subset \mathbb{T}^{Q_1}$$

erhält. Die durch 2.5.13 gegebene Beschreibung von $X(k, n)$ durch den Fächer $\Sigma(k, n)$ gibt dazu Anlass, den Koordinatenring, den man bisher als Unter algebra in $\mathbb{K}[\mathbf{s}, s_0] \subset$

$\mathbb{K}[M']$ (s. 2.2.7, S.27) gesehen hat, durch homogene Koordinaten in den Facetten-Variablen x_ρ für $\rho \in Q_1$ zu beschreiben. Zu $\sigma \in \binom{[n]}{k}$ ist

$$m^\sigma := \prod_{\chi(\sigma) \notin \mathcal{F}_\rho} x_\rho = \prod_{\rho \in Q_1(\sigma)} x_\rho \in \mathbb{K}[x_\rho : \rho \in Q_1],$$

das *Eckenmonom*, und man erhält $X(k, n)$ als Quotienten U/T mit der offenen Teilmenge

$$U := \bigcup_{\sigma} D(m^\sigma) \subset \mathbb{A}^{Q_1},$$

wobei die Einbettung $\mathbb{T}^{k \times (n-k)} \subset X(k, n)$ durch die Inklusion $\mathbb{T}^{Q_1} \subset U$ mit $\mathbb{T}^{k \times (n-k)} \cong \mathbb{T}^{Q_1}/T$ induziert wird (s. [Cox03]).

2.5.15 BEISPIEL

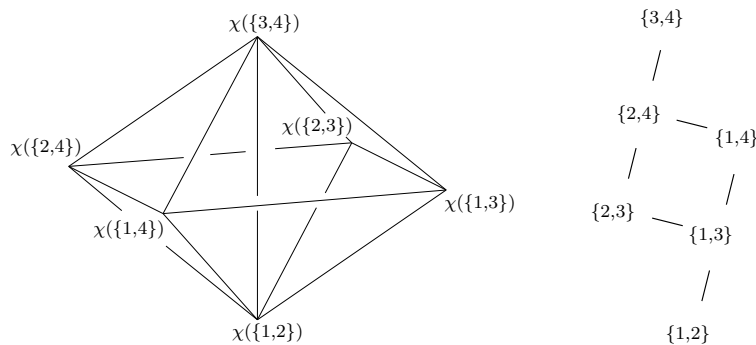
Das Ordnungspolytop $\mathcal{P}_{4 \times (4-2)} \subset \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ist die Lösungsmenge des Systems

$$0 \leq x_{11}, \quad x_{11} \leq x_{12} \leq x_{22}, \quad x_{11} \leq x_{21} \leq x_{22}, \quad x_{22} \leq 1,$$

von 6 Ungleichungen, und man erhält die folgende Facetten-Ecken-Inzidenztabelle, wobei die Inzidenz durch 0 und die Nicht-Inzidenz durch 1 gekennzeichnet ist, so dass die Spalten die Exponenten der Ecken-Monome aus 2.5.14 bilden:

	$\chi(\{1,2\})$	$\chi(\{1,3\})$	$\chi(\{1,4\})$	$\chi(\{2,3\})$	$\chi(\{2,4\})$	$\chi(\{3,4\})$
$\mathcal{F}_{(0,11)}$	0	0	0	0	0	1
$\mathcal{F}_{(11,12)}$	0	0	0	1	1	0
$\mathcal{F}_{(12,22)}$	0	1	1	0	0	0
$\mathcal{F}_{(11,21)}$	0	0	1	0	1	0
$\mathcal{F}_{(21,22)}$	0	1	0	1	0	0
$\mathcal{F}_{(22,1)}$	1	0	0	0	0	0

Dieses vierdimensionale Polytop hat ferner 13 Kanten und 13 zweidimensionale Seiten. Durch geeignete Projektion der Kanten auf eine der dreidimensionalen Facetten erhält man als Schlegel-Diagramm (s. [Grü67] 3.3.3), einen Oktaeder mit zusätzlicher Kante:



Dem Hasse-Diagramm der Ordnung $\binom{[4]}{2}$ entnimmt man, aus welchen Eckpunkten die beiden Simplexe der regulären Triangulierung $\Delta_{2,4}$ gebildet sind.

2.6 Der Grad von $X(k, n)$

In 2.5.4 (S.38) wurde festgestellt, dass der Grad der Torischen Varietät $X(k, n)$ mit der Anzahl der linearen Erweiterungen der partiellen Ordnung $k \times (n-k)$ übereinstimmt. Dies ist zum Beispiel auch, zu gegebener Termordnung, die Anzahl der möglichen Anordnungen der Terme in einem Produkt aus einem Polynom mit k und einem mit $n-k$ Termen. Für den Fall $k = 2$ ist sie als Catalan-Zahl gegeben (s.2.3.14, S.32), und es wird nun gezeigt, dass sich eine allgemeine Formel, mithin also eine Catalan-Zahl für Gitter höherer Dimension, aus einer bekannten Formel gewinnen läßt.

2.6.1 THEOREM

Der Grad der Torischen Varietät $X(k, n)$ ist

$$\deg X(k, n) = (k(n-k))! \prod_{i=1}^k \frac{(k-i)!}{(n-i)!}.$$

Es wird die *Hook-Längen-Formel* für Standard-Young-Tableaux benutzt und dafür zunächst kurz die zugehörige Terminologie zusammengefasst (s. [Ful97]).

Mit einer Partition $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ der Zahl $|\lambda| := \lambda_1 + \dots + \lambda_m \in \mathbb{N}$ mit $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_m > 0$ assoziiert man ein *Young-Diagramm*. Das ist eine Tabelle von $|\lambda|$ Zellen in m Zeilen, so dass in der i -ten Zeile (von oben gezählt) linksseitig ausgerichtet λ_i Zellen stehen. Eine *Nummerierung* des Young-Diagramms ist eine Belegung der Zellen mit natürlichen Zahlen, und ein Young-Diagramm zusammen mit einer Nummerierung heißt *Young-Tableau*. Ein Young-Tableau heißt *Standard-Young-Tableau*, wenn die Nummerierung durch $1 \dots |\lambda|$ erfolgt und sowohl Zeilen als auch Spalten von links nach rechts, bzw. von oben nach unten, ansteigend nummeriert sind. Beispielsweise sind folgende Tabellen Standard-Young-Tableaux zur Partition $8 = 4 + 3 + 1$:

1	4	6	8
2	5	7	
3			

1	2	5	6
3	4	8	
7			

Es wird mit λ auch die Menge aller Zellen des zugehörigen Young-Diagramms bezeichnet. Zu einer Zelle $z \in \lambda$ ist $a(z)$ die Anzahl der Zellen rechts von z und $l(z)$ die Anzahl der Zellen unterhalb von z . Die *Hook-Länge* zu einer Zelle z ist

$$h(z) := a(z) + l(z) + 1.$$

Die Anzahl f_λ der Standard-Young-Tableaux zur Partition λ ist durch die Hook-Längen-Formel

$$f_\lambda = \frac{|\lambda|!}{\prod_{z \in \lambda} h(z)} \quad (2.6.2)$$

gegeben. Diese Formel wird z.B. in [PS92] bewiesen.

Beweis von 2.6.1. Man bilde die Paare $(i, j) \in k \times (n-k)$ durch die Zuordnung $(i, j) \mapsto \nu(i, j) := (i-1)(n-k) + j$ auf die Zahlen $1 \dots k(n-k)$ ab und schreibe sie in eine $k \times (n-k)$ Matrix, etwa $\nu(i, j)$ an die Stelle (r, s) . Die Zuordnung $(i, j) \mapsto (r, s)$ ist dann eine Permutation von $k \times (n-k)$, die genau dann die partielle Ordnung $k \times (n-k)$ erhält, wenn die Zahlen $\nu(i, j)$ zeilen- und spaltenweise

ansteigend angeordnet sind. Die Standard-Young-Tableaux zur Partition $k(n-k) = (n-k) + \dots + (n-k)$ entsprechen also den linearen Erweiterungen von $k \times (n-k)$, so dass ihre Anzahl durch die Formel 2.6.2 für $\lambda = (n-k, \dots, n-k)$ beschrieben wird.

Für die Zellen $z = (\nu, \mu) \in k \times (n-k)$ ist $a(\nu, \mu) = n - k - \mu$ und $l(\nu, \mu) = k - \nu$, also ist $h(\nu, \mu) = n - \nu - \mu + 1$ die Hook-Länge. Substitution von $i = k - \nu$ und $j = n - \nu - \mu + 1$ in der Formel 2.6.2 ergibt

$$\prod_{(\nu, \mu) \in k \times (n-k)} h(\nu, \mu) = \prod_{i=0}^{k-1} \prod_{j=i+1}^{n-k+i} j = \prod_{i=1}^k \frac{(n-i)!}{(k-i)!},$$

also die Formel 2.6.1. □

3 Degeneration der Grassmannschen

3.1 Die klassischen Plücker-Relationen

Es sollen hier Erzeuger des Plücker-Ideals $\mathfrak{J}_{k,n}$ (s. 1.2.10, S.14), die sogenannten *Plücker-Relationen*, explizit hergeleitet werden. Dazu wird wie in 1.1 von einem n -dimensionalen K -Vektorraum V ausgegangen und die Plücker-Einbettung 1.1.15 (S.10)

$$\mathfrak{P}_{k,V}: \mathfrak{G}(k, V) \hookrightarrow \mathbb{P} \bigwedge^k V$$

zugrunde gelegt. Wie in 1.1 (S.8ff) bereits ausgeführt wurde, bilden zu jeder Basis (v_1, \dots, v_n) von V die Multivektoren

$$v_\sigma := v_{\sigma_1} \wedge \dots \wedge v_{\sigma_k}$$

für $\sigma = \{\sigma_1 < \dots < \sigma_k\} \in \binom{n}{k}$ (nach Anordnung) eine Basis von $\bigwedge^k V$, wobei hier gelegentlich v_σ mit $v_{\sigma_1 \dots \sigma_k}$ notiert wird. Insbesondere gilt für $v_1, \dots, v_k \in V$

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_k \neq 0 \iff \{v_1, \dots, v_k\} \text{ linear unabhängig,}$$

sowie

$$v_{\pi(1)} \wedge \dots \wedge v_{\pi(k)} = \text{sgn}(\pi) v_1 \wedge \dots \wedge v_k$$

für jede Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_k$. Allgemeiner ist für $r, s \geq 0$ das äußere Produkt als bilineare Abbildung

$$\wedge: \bigwedge^r V \times \bigwedge^s V \longrightarrow \bigwedge^{r+s} V$$

mit $\zeta \wedge \eta = (-1)^{r+s} \eta \wedge \zeta$ für $\zeta \in \bigwedge^r V$ und $\eta \in \bigwedge^s V$ gegeben.

Bezüglich einer Basis von V lassen sich die in 1.2 eingeführten freien Erzeuger p_σ des graduierten Polynomrings $K[\mathbf{p}] = K[p_\sigma: \sigma \in \binom{n}{k}]$ als die Elemente der dualen Basis von V^\vee auffassen, so dass zu jeder Basis von V ein Isomorphismus

$$K[\mathbf{p}] \cong \bigoplus_{r \geq 0} \text{Sym}^r \bigwedge^k V^\vee$$

von graduierten K -Algebren gegeben ist, wobei für einen beliebigen K -Vektorraum W das r -fache symmetrische Produkt als

$$\text{Sym}^r W := \bigotimes^r W / \text{span} \{(w_1 \otimes \dots \otimes w_r) - (w_{\pi(1)} \otimes \dots \otimes w_{\pi(r)}): \pi \in \mathfrak{S}_r\}$$

definiert ist, d.h. man faßt Tensoren der Form $w_1 \otimes \dots \otimes w_r$ modulo Kommutativität als Monome vom Grad r auf und notiert dementsprechend Erzeuger von $\text{Sym}^r W$ mit $w_1 \cdots w_r$. Der im r -ten graduierten Teil von $K[\mathbf{p}]$ enthaltene Teil des in 1.2.10 definierten homogenen Primideals $\mathfrak{J}_{k,n}$ bildet demnach jeweils einen Unterraum im K -Vektorraum $\text{Sym}^r \bigwedge^k V^\vee$.

Unter Identifikation mit dem Bild der Plücker-Einbettung 1.1.15 ist nun $\mathfrak{G}(k, V)$ die Menge aller homogenen Punkte $[\omega] \in \mathbb{P} \bigwedge^k V$ mit der Eigenschaft, dass ω *zerlegbar* ist, d.h. dass Vektoren $v_1, \dots, v_k \in V$ mit $\omega = v_1 \wedge \dots \wedge v_k$ existieren. Speziell stimmt $\mathfrak{G}(1, V)$ mit $\mathbb{P} \bigwedge^1 V = \mathbb{P} V$ überein, während im Allgemeinen offenbar eine echte Inklusion vorliegt. Ist etwa (e_1, \dots, e_n) eine Basis von V , so liegt beispielsweise $[e_{12} + e_{34}]$ nicht in $\mathfrak{G}(2, 4) := \mathfrak{G}(2, K^4)$, denn aus $e_{12} + e_{34} = v_1 \wedge v_2$ würde $(e_{12} + e_{34}) \wedge v_i = 0$ für $i = 1, 2$ folgen, was wegen

$$(e_{12} + e_{34}) \wedge (z_1 e_1 + z_2 e_2 + z_3 e_3 + z_4 e_4) = z_1 e_{134} + z_2 e_{234} + z_3 e_{123} + z_4 e_{124}$$

für alle $v = {}^t(z_1, \dots, z_4) \in \mathbb{K}^4$ aber $v_1 = v_2 = 0$ implizieren würde. Generell liefert die für jeden Vektor $\omega \in \bigwedge^k V$ definierte lineare Abbildung

$$\wedge(\omega): V \longrightarrow \bigwedge^{k+1} V, \quad v \longmapsto \omega \wedge v \quad (3.1.1)$$

die folgende Charakterisierung der zerlegbaren Vektoren.

3.1.2 DEFINITION+PROPOSITION

Für $0 \neq \omega \in \bigwedge^k V$ sei

$$L_\omega := \ker \wedge(\omega) = \{v \in V : \omega \wedge v = 0\},$$

dann gilt $\dim_{\mathbb{K}} L_\omega \leq k$ und $\dim_{\mathbb{K}} L_\omega = k$ genau dann, wenn ω zerlegbar ist.

Beweis. Man kann eine Basis (v_1, \dots, v_m) von L_ω zu einer Basis (v_1, \dots, v_n) von V ergänzen und erhält aus der resultierenden Basis (v_σ) von $\bigwedge^k V$ für $r = 1 \dots m$ jeweils eine Zerlegung $\bigwedge^k V = W_1^{(r)} \oplus W_2^{(r)}$ mit $W_1^{(r)} = \text{span}\{v_\sigma : r \in \sigma\}$, $W_2^{(r)} = \text{span}\{v_\sigma : r \notin \sigma\}$. Da genau dann $v_\sigma \wedge v_r = 0$ gilt, wenn $r \in \sigma$, impliziert $\omega \wedge v_r = 0$ für die Darstellungen $\omega = \omega_1^{(r)} + \omega_2^{(r)}$ mit $\omega_1^{(r)} \in W_1^{(r)}$, $\omega_2^{(r)} \in W_2^{(r)}$, jeweils $\omega_2^{(r)} \wedge v_r = 0$ und $\omega_2^{(r)} = 0$. Daher folgt $\omega \in W_1^{(1)} \cap \dots \cap W_1^{(m)} = \text{span}\{v_\sigma : \{1, \dots, m\} \subset \sigma\}$. Wegen $\omega \neq 0$ folgt also $m \leq k$ und $m = k$ genau dann, wenn $\omega \in \bigwedge^k L_\omega$, also genau dann wenn ω zerlegbar ist. \square

Insbesondere ist klar, dass im Falle von $\dim L_\omega = k$ die Zerlegung $\omega = v_1 \wedge \dots \wedge v_k$ eine Basis (v_1, \dots, v_k) von L_ω liefert und die Zuordnung $[\omega] \longmapsto L_\omega$ auf dem Bild der Plücker-Einbettung eine Umkehrung definiert.

3.1.2 kann man auch so formulieren, dass $\wedge(\omega)$ immer mindestens vom Rang $n - k$ ist und dass $[\omega]$ genau dann in $\mathfrak{G}(k, V)$ enthalten ist, wenn $\text{rank} \wedge(\omega) \leq n - k$. Wie [Har92](6.6) bemerkt, induziert die lineare Abbildung $\omega \longmapsto \wedge(\omega)$ eine Matrix $A^{k,n}$ mit Einträgen der Form $\pm p_\sigma$. Die Minoren dieser Matrix sind homogene Polynome in $\mathbb{K}[\mathbf{p}]$, so dass man $\mathfrak{G}(k, V)$ mit der Nullstellenmenge der $(n - k + 1)$ -Minoren von $A^{k,n}$ identifizieren kann.

3.1.3 BEISPIEL

Die Matrix $A^{2,4}$ mit $\mathbf{p} = (p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{24}, p_{34})$ ist

$$A^{2,4} = \begin{pmatrix} p_{23} & -p_{13} & p_{12} & 0 \\ p_{24} & -p_{14} & 0 & p_{12} \\ p_{34} & 0 & -p_{14} & p_{13} \\ 0 & p_{34} & -p_{24} & p_{23} \end{pmatrix},$$

deren nicht verschwindende 3-Minoren die Polynome der Form

$$\pm p_{ij}(p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23}) \quad (1 \leq i < j \leq 4)$$

sind. Man erhält also erneut (vgl. 1.2.11, S.14) den Erzeuger

$$p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23} \quad (3.1.4)$$

des Hauptideals $\mathfrak{I}_{2,4}$.

Wie das Beispiel 3.1.3 bereits zeigt, sind die $(n - k + 1)$ -Minoren von $A^{k,n}$ i.A. jedoch von zu hohem Grad und erzeugen nicht das Plücker-Ideal, sondern nur ein Ideal, dessen Saturierung das Plücker-Ideal ist. Für den Spezialfall $k = 2$ kann man jedoch direkt Erzeuger bestimmen.

3.1.5 PROPOSITION

Es sei $n > 2$ und $k = 2$. $\omega \in \bigwedge^2 V$ ist genau dann zerlegbar, wenn $\omega \wedge \omega = 0$, und das Plücker-Ideal $\mathfrak{I}_{2,n}$ wird von den $\binom{n}{4}$ homogenen quadratischen Polynomen

$$p_{ij}p_{\nu\mu} - p_{iv}p_{j\mu} + p_{i\mu}p_{j\nu} \quad (1 \leq i < j < \nu < \mu \leq n)$$

erzeugt.

Beweis. Es sei (e_1, \dots, e_n) eine Basis von V und $0 \neq \omega = \sum_{i < j} c_{ij} e_i \wedge e_j$ mit Koeffizienten $c_{ij} \in \mathbb{K}$ für $1 \leq i < j \leq n$. Man erhält

$$\begin{aligned} \omega \wedge \omega &= \left(\sum_{i < j} c_{ij} e_i \wedge e_j \right) \wedge \left(\sum_{\nu < \mu} c_{\nu\mu} e_\nu \wedge e_\mu \right) = \sum_{i < j} \sum_{\nu < \mu} c_{ij} c_{\nu\mu} e_i \wedge e_j \wedge e_\nu \wedge e_\mu \\ &= \sum_{i < j < \nu < \mu} 2(c_{ij} c_{\nu\mu} - c_{ik} c_{j\mu} + c_{il} c_{j\nu}) e_i \wedge e_j \wedge e_\nu \wedge e_\mu, \end{aligned}$$

wobei sich die Koeffizienten zu den Summanden mit $i < j < \nu < \mu$ aus den 6 Permutationen $\pi \in \mathfrak{S}_4$ mit $\pi^{-1}(1) < \pi^{-1}(2)$ und $\pi^{-1}(3) < \pi^{-1}(4)$ und deren Vorzeichen ergeben:

$$\begin{aligned} \pi \in \{(1), (13)(24)\} &\rightsquigarrow +c_{ij}c_{\nu\mu} + c_{\nu\mu}c_{ij} = +2c_{ij}c_{\nu\mu} \\ \pi \in \{(23), (1342)\} &\rightsquigarrow -c_{iv}c_{j\mu} - c_{j\mu}c_{iv} = -2c_{iv}c_{j\mu} \\ \pi \in \{(234), (132)\} &\rightsquigarrow +c_{i\mu}c_{j\nu} + c_{j\nu}c_{i\mu} = +2c_{i\mu}c_{j\nu} \end{aligned}$$

(Man beachte, dass $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$ für $k = 2$ vorausgesetzt ist.) Wegen der linearen Unabhängigkeit der $e_i \wedge e_j \wedge e_\nu \wedge e_\mu$ impliziert $\omega \wedge \omega = 0$ damit die Gleichungen

$$c_{ij}c_{\nu\mu} - c_{iv}c_{j\mu} + c_{i\mu}c_{j\nu} = 0$$

für $i < j < \nu < \mu$. Nach Wahl eines $c_{ij} \neq 0$ erhält man daraus die Zerlegung

$$\begin{aligned} c_{ij}\omega &= \sum_{\nu < \mu} c_{ij}c_{\nu\mu} e_\nu \wedge e_\mu = \sum_{\nu < \mu} (c_{iv}c_{j\mu} - c_{i\mu}c_{j\nu}) e_\nu \wedge e_\mu \\ &= \sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu=1}^n c_{iv}c_{j\mu} e_\nu \wedge e_\mu = \left(\sum_{\nu=1}^n c_{iv} e_\nu \right) \wedge \left(\sum_{\mu=1}^n c_{j\mu} e_\mu \right). \end{aligned}$$

□

Um allgemeinere Aussagen zu erhalten, erweist es sich als nützlich, neben dem in 3.1.2 definierten Raum L_ω auch den kleinsten Unterraum L zu betrachten, der $\omega \in \bigwedge^k L$ erfüllt. Dieser Ansatz wird aus [GH78](Ch.1.5) übernommen.

3.1.6 DEFINITION+PROPOSITION

Für $0 \neq \omega \in \bigwedge^k V$ sei

$$L^\omega := \bigcap \left\{ L \leq V : \omega \in \bigwedge^k L \right\},$$

dann gilt $\dim_{\mathbb{K}} L^\omega \geq k$ und $\dim_{\mathbb{K}} L^\omega = k$ genau dann, wenn ω zerlegbar ist. Außerdem ist L_ω ein Unterraum von L^ω .

Beweis. L^ω ist der eindeutig bestimmte kleinste Unterraum L mit $\omega \in \bigwedge^k L$. Insbesondere gilt also $\omega \in \bigwedge^k L^\omega \neq 0$ und der erste Teil ist klar. Sei $v \in L_\omega$ und L ein Unterraum von V mit $\omega \in \bigwedge^k L$. Ist (u_1, \dots, u_r) eine Basis von L , so impliziert $\omega \wedge v = 0$, dass die Menge $\{u_{i_1} \wedge \dots \wedge u_{i_k} \wedge v : i_1 < \dots < i_k\}$ linear abhängig ist. Daraus folgt $v \in L$, denn andernfalls wären diese Multivektoren in einer Basis von $\bigwedge^{k+1}(L \oplus Kv)$ enthalten. Also gilt $L_\omega \subset L^\omega$. \square

Mit 3.1.2 und 3.1.6 ist nun $0 \neq \omega \in \bigwedge^k V$ genau dann zerlegbar, wenn L_ω und L^ω übereinstimmen, also genau dann, wenn L^ω in L_ω enthalten ist.

3.1.7 KOROLLAR

$0 \neq \omega \in \bigwedge^k V$ ist genau dann zerlegbar, wenn $\omega \wedge v = 0$ für alle $v \in L^\omega$.

Der natürliche Isomorphismus $\bigwedge^k V^\vee \cong (\bigwedge^k V)^\vee$ erlaubt es, Paarungen der Form $\langle \zeta, \eta \rangle$ für $\zeta \in \bigwedge^k V$ und $\eta \in \bigwedge^k V^\vee$ zu betrachten, wobei

$$\langle v_1 \wedge \dots \wedge v_k, \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k \rangle = \det(\langle v_i, \varphi_j \rangle)_{i,j=1\dots k} \quad (3.1.8)$$

für Erzeuger $v_1 \wedge \dots \wedge v_k \in \bigwedge^k V$ und $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k \in \bigwedge^k V^\vee$. Insbesondere hat $\omega \in \bigwedge^k V$ zu jeder Basis (v_1, \dots, v_n) von V mit dualer Basis (v_1^*, \dots, v_n^*) von V^\vee die Darstellung

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \langle \omega, v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge v_{i_k}^* \rangle v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_k},$$

und (v_1, \dots, v_n) enthält eine Basis von L^ω , wenn maximal viele $\langle \omega, v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge v_{i_k}^* \rangle$ verschwinden.

3.1.9 PROPOSITION

L^ω ist der Unterraum aller $v \in V$ mit der Eigenschaft, dass ein $\phi \in \bigwedge^{k-1} V^\vee$ existiert, so dass $\langle v, u \rangle = \langle \omega, u \wedge \phi \rangle$ für alle $u \in V^\vee$.

Beweis. Es sei ein Unterraum L mit Basis (v_1, \dots, v_m) gegeben, so dass (v_1, \dots, v_n) eine Basis von V und (v_1^*, \dots, v_n^*) die dazu duale Basis von V^\vee bildet. Einerseits hat jedes Element v aus dem definierten Vektorraum eine eindeutige Darstellung $v = v' + v''$ mit $v' \in L$ und $v'' = \sum_{i=m+1}^n \langle v, v_i^* \rangle v_i = \sum_{i=m+1}^n \langle \omega, v_i^* \wedge \phi \rangle v_i$ für ein $\phi \in \bigwedge^{k-1} V^\vee$. Ist also $\omega \in \bigwedge^k L$, so folgt $v'' = 0$ und daher $v = v' \in L$, denn dann hat ω eine Darstellung durch die induzierte Basis (v_σ) von $\bigwedge^k L$, und für $\sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ mit $1 \leq \sigma_1 < \dots < \sigma_k \leq m$ und $i = m+1 \dots n$ ist $\langle v_\sigma, v_i^* \wedge \phi \rangle$ eine Summe von Determinanten, die in einer Zeile die Paarungen $\langle v_{\sigma_j}, v_i^* \rangle = 0$ für $j = 1 \dots k$ enthalten, so dass $\langle \omega, v_i^* \wedge \phi \rangle = 0$ für $i = m+1 \dots n$ folgt.

Andererseits ist die Abbildung $v: u \mapsto \langle \omega, u \wedge \phi \rangle$ für $\phi := v_{\sigma_1}^* \wedge \dots \wedge v_{\sigma_{k-1}}^*$ zu $\sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ mit $1 \leq \sigma_1 < \dots < \sigma_k \leq n$ eine Linearform auf V^\vee , also ist $v \in V^{\vee\vee} = V$ mit $\langle v, u \rangle = \langle \omega, u \wedge \phi \rangle$ für alle $u \in V^\vee$. Enthält also L den angegebenen Unterraum, so folgt $v \in L$, und $0 \neq \langle \omega, v_{\sigma_1}^* \wedge \dots \wedge v_{\sigma_k}^* \rangle = \pm \langle \omega, v_{\sigma_k}^* \wedge \phi \rangle = \pm \langle v, v_{\sigma_k}^* \rangle$ impliziert $\sigma_k \leq m$, woraus $\omega \in \bigwedge^k L$ folgt. \square

3.1.9 besagt, dass L^ω das Bild der eindeutig bestimmten linearen Abbildung

$$(\omega \lrcorner \cdot): \bigwedge^{k-1} V^\vee \longrightarrow V, \quad \phi \longmapsto \omega \lrcorner \phi,$$

ist, die

$$\langle \omega \lrcorner \phi, u \rangle = \langle \omega, u \wedge \phi \rangle \quad (3.1.10)$$

für alle $u \in V^\vee$ erfüllt. Man erhält sie aus der Bilinearform $b_\omega: V^\vee \times \bigwedge^{k-1} V^\vee \longrightarrow \mathbb{K}$ mit $b_\omega(u, \phi) := \langle \omega, u \wedge \phi \rangle$ als die Abbildung $\phi \longmapsto b_\omega(\cdot, \phi) \in V^{\vee\vee} = V$. Mit 3.1.7 folgt also:

3.1.11 KOROLLAR

$0 \neq \omega \in \bigwedge^k V$ ist genau dann zerlegbar, wenn $\omega \wedge (\omega \lrcorner \phi) = 0$ für alle $\phi \in \bigwedge^{k-1} V$, d. h. es gilt

$$[\omega] \in \mathfrak{G}(k, V) \iff \wedge(\omega) \circ (\omega \lrcorner \cdot) = 0 \in \text{Hom}(\bigwedge^{k-1} V^\vee, \bigwedge^{k+1} V),$$

wobei $\wedge(\omega): v \longmapsto \omega \wedge v$ die Abbildung 3.1.1 bezeichnet.

3.1.12 BEMERKUNG

Man hat allgemeiner Kontraktionsoperatoren der Form

$$\begin{aligned} \lrcorner : \bigwedge^p V \otimes \bigwedge^{p+q} V^\vee &\longrightarrow \bigwedge^q V^\vee & (\langle z, x \lrcorner y \rangle = \langle x \wedge z, y \rangle \quad \forall z \in \bigwedge^q V), \\ \lrcorner : \bigwedge^{p+q} V \otimes \bigwedge^p V^\vee &\longrightarrow \bigwedge^q V & (\langle x \lrcorner y, z \rangle = \langle x, y \wedge z \rangle \quad \forall z \in \bigwedge^q V^\vee), \end{aligned}$$

für $p, q \geq 0$ (vgl. [FH91] B.3). Insbesondere ist $\wedge(\omega)$ für $\omega \in \bigwedge^k V$ die duale Abbildung $(\omega \lrcorner \cdot)^\vee: V \longrightarrow \bigwedge^{k+1} V$. In der Notation von [GH78] ist die Bedingung 3.1.11 für die Zerlegbarkeit von ω durch

$$i(i(\Xi)\omega)\omega = 0$$

für alle $\Xi \in \bigwedge^{k+1} V^\vee$ gegeben, wobei $i(\Xi): \bigwedge^k V \longrightarrow V^\vee$ mit $i(\cdot)\omega = (\omega \lrcorner \cdot)^\vee$ und $i(u): \bigwedge^k V \longrightarrow \bigwedge^{k-1} V$ für $u \in V^\vee$ mit $i(\cdot)\omega = (\omega \lrcorner \cdot)$, d.h. $i(i(\cdot)\omega)\omega: \bigwedge^{k+1} V^\vee \longrightarrow \bigwedge^{k-1} V$ ist die zu $\wedge(\omega) \circ (\omega \lrcorner \cdot)$ duale Abbildung.

3.1.13 DEFINITION

Es bezeichne \mathbf{P}_k die Abbildung

$$\bigwedge^k V \otimes \bigwedge^k V \longrightarrow \text{Hom}(\bigwedge^{k-1} V^\vee, \bigwedge^{k+1} V)$$

mit $\mathbf{P}_k(\zeta \otimes \eta)(\phi) = \eta \wedge (\zeta \lrcorner \phi)$ für alle $\phi \in \bigwedge^{k-1} V^\vee$, bzw. die entsprechende Abbildung unter der natürlichen Identifikation

$$\text{Hom}(\bigwedge^{k-1} V^\vee, \bigwedge^{k+1} V) = \bigwedge^{k-1} V \otimes \bigwedge^{k+1} V.$$

Mit $\bar{\mathbf{P}}_k$ sei die Komposition der dualen Abbildung \mathbf{P}_k^\vee mit der kanonischen Projektion auf $\text{Sym}^2 \bigwedge^k V^\vee$ bezeichnet:

$$\begin{array}{ccc} \bigwedge^{k-1} V^\vee \otimes \bigwedge^{k+1} V^\vee & \xrightarrow{\mathbf{P}_k^*} & \bigwedge^k V^\vee \otimes \bigwedge^k V^\vee \\ & \searrow \bar{\mathbf{P}}_k & \downarrow \\ & & \text{Sym}^2 \bigwedge^k V^\vee \end{array}$$

Es ist also $0 \neq \omega \in \bigwedge^k V$ genau dann zerlegbar, wenn $\omega \otimes \omega \in \ker \mathbf{P}_k = (\text{im } \mathbf{P}_k^*)^\perp$. Dies ist äquivalent zu $f(\omega) = \langle f, \omega^2 \rangle = 0$ für alle $f \in \text{im } \overline{\mathbf{P}}_k$, wobei $\omega^2 \in \text{Sym}^2 \bigwedge^k V = (\text{Sym}^2 \bigwedge^k V^\vee)^\vee$.

3.1.14 KOROLLAR

Für $0 \neq \omega \in \bigwedge^k V$ gilt

$$[\omega] \in \mathfrak{G}(k, V) \iff f(\omega) = 0 \text{ für alle } f \in \text{im } \overline{\mathbf{P}}_k.$$

Insbesondere wird das Plücker-Ideal $\mathfrak{J}_{k,n}$ von den homogenen quadratischen Polynomen im Vektorraum $\text{im } \overline{\mathbf{P}}_k \subset \text{Sym}^2 \bigwedge^k V^\vee = \mathbb{K}[\mathbf{p}]_2$ erzeugt.

Es sollen nun aus der durch 3.1.14 gegebenen abstrakten Erzeugermenge des Plücker-Ideals kombinatorische Definitionen der Erzeuger hergeleitet werden. Dazu sei eine Basis (e_1, \dots, e_n) von V mit dualer Basis (e_1^*, \dots, e_n^*) von V^\vee fixiert.

3.1.15 PROPOSITION

- (i) Die Abbildung $\mathbf{P}_k: \bigwedge^k V \otimes \bigwedge^k V \longrightarrow \bigwedge^{k-1} V \otimes \bigwedge^{k+1} V$ ist die lineare Abbildung, die durch

$$\begin{aligned} & (v_1 \wedge \dots \wedge v_k) \otimes (w_1 \wedge \dots \wedge w_k) \\ & \longmapsto \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} (v_1 \wedge \dots \widehat{v}_i \dots \wedge v_k) \otimes (w_1 \wedge \dots \wedge w_k \wedge v_i) \end{aligned}$$

für $v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_k \in V$ gegeben ist.

- (ii) Die zu \mathbf{P}_k duale Abbildung $\mathbf{P}_k^*: \bigwedge^{k-1} V^\vee \otimes \bigwedge^{k+1} V^\vee \longrightarrow \bigwedge^k V^\vee \otimes \bigwedge^k V^\vee$ ist die Abbildung

$$\begin{aligned} & (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_{k-1}) \otimes (\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_{k+1}) \\ & \longmapsto \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^i (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_{k-1} \wedge \psi_i) \otimes (\psi_1 \wedge \dots \widehat{\psi}_i \dots \wedge \psi_{k+1}) \end{aligned}$$

für $\varphi_1, \dots, \varphi_k, \psi_1, \dots, \psi_k \in V^\vee$.

Beweis. Für Basisvektoren e_σ und e_τ der induzierten Basis von $\bigwedge^k V$ erhält man für $\phi \in \bigwedge^{k-1} V^\vee$ mit 3.1.10:

$$e_\tau \wedge (e_\sigma \lrcorner \phi) = \sum_{i=1}^n \langle e_\sigma \lrcorner \phi, e_i^* \rangle e_\tau \wedge e_i = \sum_{i=1}^n \langle e_\sigma, e_i^* \wedge \phi \rangle e_\tau \wedge e_i.$$

Aufgrund der Darstellung 3.1.8 der natürlichen Isomorphie $\bigwedge^k V^\vee \cong (\bigwedge^k V)^\vee$ ist klar, dass $\langle e_\sigma, e_i^* \wedge \phi \rangle = 0$ für $i \notin \sigma$ gilt, während man für $\sigma = \{\sigma_1 < \dots < \sigma_k\}$ und $\nu = 1 \dots k$ jeweils

$$\begin{aligned} \langle e_\sigma, e_{\sigma_\nu}^* \wedge \phi \rangle &= (-1)^{\nu+1} \langle e_{\sigma_\nu} \wedge (e_{\sigma_1} \wedge \dots \widehat{e_{\sigma_\nu}} \dots \wedge e_{\sigma_k}), e_{\sigma_\nu}^* \wedge \phi \rangle \\ &= (-1)^{\nu+1} \langle e_{\sigma_1} \wedge \dots \widehat{e_{\sigma_\nu}} \dots \wedge e_{\sigma_k}, \phi \rangle \end{aligned}$$

erhält. Da die natürliche Isomorphie $\bigwedge^{k-1} V \otimes \bigwedge^{k+1} V \cong \text{Hom}(\bigwedge^{k-1} V^\vee, \bigwedge^{k+1} V)$ durch $(\zeta \otimes \eta)(\phi) = \langle \zeta, \phi \rangle \eta$ für $\zeta \in \bigwedge^{k-1} V$ und $\eta \in \bigwedge^{k+1} V$ gegeben ist, resultiert daraus die Darstellung (i) für \mathbf{P}_k .

Man erhält eine Darstellung von \mathbf{P}_k^\vee durch Transposition der darstellenden Matrix von \mathbf{P}_k . In einer durch (α, β) mit $\alpha \in \binom{n}{k-1}$ und $\beta \in \binom{n}{k+1}$ indizierten Zeile dieser Matrix sind entsprechend (i) genau die Einträge in den durch (σ, τ) indizierten Spalten von Null verschieden, für die es ein $b \in \sigma \setminus \tau$ gibt, so dass $\alpha = \sigma \setminus \{b\}$ und $\beta = \tau \cup \{b\}$. Sei also zu $\beta = \{\beta_1 < \dots < \beta_{k+1}\}$ ein Index μ mit $b := \beta_\mu \notin \alpha$ gegeben, sowie $\sigma = \alpha \cup \{b\} = \{\sigma_1 < \dots < \sigma_k\}$, also $b = \sigma_\nu$ für ein ν mit $1 \leq \nu \leq k$, und $\tau = \beta \setminus \{b\}$, also $e_\beta = (-1)^{k+1-\mu} e_\tau \wedge e_b$. Der zu (α, β) gehörige Summand von $\mathbf{P}_k(e_\sigma \otimes e_\tau)$ ist damit

$$(-1)^{\nu+1} e_\alpha \otimes (e_\tau \wedge e_b) = (-1)^{k-\mu+\nu} e_\alpha \otimes e_\beta,$$

so dass $(-1)^{k-\mu+\nu}$ der Eintrag an dieser Stelle der Matrix ist, woraus sich wegen $e_\alpha \wedge e_b = (-1)^{k-\nu} e_\sigma$ und

$$(k - \mu + \nu) + (k - \nu) \equiv \mu \pmod{2}$$

die Darstellung (ii) für \mathbf{P}_k^\vee ergibt. □

Aus der Darstellung 3.1.15 (ii) der Abbildung \mathbf{P}_k^\vee erhält man die klassischen Plücker-Relationen, wie man sie etwa bei [HP53](VII) findet.

3.1.16 KOROLLAR

Das Plücker-Ideal $\mathfrak{J}_{k,n}$ wird von den homogenen quadratischen Polynomen

$$\sum_{\nu=1}^{k+1} (-1)^\nu p_{i_1 \dots i_{k-1} j_\nu} p_{j_1 \dots \widehat{j}_\nu \dots j_{k+1}}$$

für alle $(i_1 \dots i_{k-1})$ und $(j_1 \dots j_{k+1})$ mit $1 \leq i_1 < \dots < i_{k-1} \leq n$ und $1 \leq j_1 < \dots < j_{k+1} \leq n$ erzeugt, wobei die Indizes entsprechend der Identifikation $p_{i_1 \dots i_k} = e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*$ für $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ als alternierend aufzufassen sind.

3.2 Eine Basis für das Plücker-Ideal $\mathfrak{J}_{k,n}$

Die Formel 3.1.16 erzeugt viele Polynome mehrfach, und auch die Menge der von Null verschiedenen Plücker-Relationen ist i. A. (für $k > 2$) nicht linear unabhängig. Es soll nun eine Basis des von den Plücker-Relationen erzeugten Vektorraums im $\overline{\mathbf{P}}_k$ (s. 3.1.14) beschrieben werden. Es sei hier stets $k > 1$ vorausgesetzt, so dass die Voraussetzung $\text{char } \mathbf{K} = 0$ oder $\text{char } \mathbf{K} > k$ an den zugrundeliegenden Körper \mathbf{K} insbesondere $\text{char } \mathbf{K} \neq 2$ impliziert.

3.2.1 PROPOSITION

Die Abbildung $\mathbf{P}_k: \bigwedge^k V \otimes \bigwedge^k V \longrightarrow \bigwedge^{k-1} V \otimes \bigwedge^{k+1} V$ (s. 3.1.13) ist surjektiv.

Der Beweis von 3.2.1 stützt sich auf den folgenden technischen Hilfssatz.

3.2.2 LEMMA

Es sei $0 \leq m < k$ und eine linear unabhängige Menge $\{v_1, \dots, v_{2k-m}\} \subset V$ gegeben. Es sei $v(m) := v_1 \wedge \dots \wedge v_m$ und für $\alpha = \{\alpha_1 < \dots < \alpha_t\} \subset \{m+1, \dots, 2k-m\}$ sei $v(\alpha) := v_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge v_{\alpha_t}$, sowie $\bar{\alpha} := \{m+1, \dots, 2k-m\} \setminus \alpha$. Für $\sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_{k-m}\}$ mit $m < \sigma_1 < \dots < \sigma_{k-m} < 2k-m$ sei

$$w(\sigma) := (-1)^{\sum_i \sigma_i - 1} (v(m) \wedge v(\sigma)) \otimes (v(m) \wedge v(\bar{\sigma})) \in \bigwedge^k V \otimes \bigwedge^k V,$$

und für $\tau = \{\tau_1, \dots, \tau_{k-m-1}\}$ mit $m < \tau_1 < \dots < \tau_{k-m-1} < 2k - m$ sei

$$u(\tau) := (-1)^{\sum_i \tau_i} (v(m) \wedge v(\tau)) \otimes (v(m) \wedge v(\bar{\tau})) \in \wedge^{k-1} V \otimes \wedge^{k+1} V.$$

Für $r = 1 \dots k - m$ ist dann mit

$$w^{(r)} := \sum_{\sigma_{r-1} < k \leq \sigma_r} w(\sigma), \quad u^{(r)} := \sum_{\tau_{r-1} < k \leq \tau_r} u(\tau)$$

und $u^{(0)} := 0$ die folgende Gleichung erfüllt:

$$\mathbf{P}_k(w^{(r)}) = (-1)^{k-m} \left((k - m - r + 1) u^{(r-1)} + r u^{(r)} \right). \quad (*)$$

Beweis. Entsprechend der Darstellung 3.1.15 wird jeder der in $w^{(r)}$ auftretenden Summanden $w(\sigma)$ unter \mathbf{P}_k zu k Summanden expandiert, von denen wegen $v(m) \wedge v_i = 0$ für $i = 1 \dots m$ nur $k - m$ Summanden $w(\sigma, \nu)$, $\nu = 1 \dots k - m$, nicht verschwinden, wobei

$$w(\sigma, \nu) = (-1)^{m+\nu+\sum_i \sigma_i} (v(m) \wedge v(\sigma \setminus \{\sigma_\nu\})) \otimes (v(m) \wedge v(\bar{\sigma}) \wedge v_{\sigma_\nu}).$$

Mit $\tau = \sigma \setminus \{\sigma_\nu\} = \{\tau_1 < \dots < \tau_{k-m-1}\}$ gilt dann $\tau_i = \sigma_i$ für $i < \nu$ und $\tau_i = \sigma_{i+1}$ für $i \geq \nu$, so dass

$$\begin{aligned} \tau_{r-2} &\leq \sigma_{r-1} < k \leq \sigma_r = \tau_{r-1}, & \text{falls } \nu < r, \\ \tau_{r-1} &= \sigma_{r-1} < k \leq \sigma_r \leq \tau_r, & \text{falls } \nu \geq r. \end{aligned}$$

Bis auf Vorzeichen ist also $w(\sigma, \nu) = \pm u(\tau)$ entweder ein Summand von $u^{(r)}$ oder, sofern $r > 1$, von $u^{(r-1)}$. Für $\bar{\tau} = \{\bar{\sigma}_1 < \dots < \bar{\sigma}_\mu < \sigma_\nu < \bar{\sigma}_{\mu+1} < \dots < \bar{\sigma}_{k-m}\}$ mit $0 \leq \mu \leq k - m$ gilt nun $v(\bar{\sigma}) \wedge v_{\sigma_\nu} = (-1)^{k-m-\mu} v(\bar{\tau})$ und $\mu = \sigma_\nu - m - \nu$, wie man der Zerlegung

$$\sigma_\nu - m = |\{m+1, \dots, \sigma_\nu\}| = |\{\sigma_i: \sigma_i \leq \sigma_\nu\}| + |\{\bar{\sigma}_i: \bar{\sigma}_i \leq \sigma_\nu\}|$$

entnimmt. Damit ist $m + \nu + \sigma_\nu \equiv \mu \pmod{2}$ und wegen $\sum_i \sigma_i = \sum_i \tau_i + \sigma_\nu$ also

$$m + \nu + \sum_i \sigma_i \equiv (k - m) + (k - m - \mu) + \sum_i \tau_i \pmod{2}$$

und daher $w(\sigma, \nu) = (-1)^{k-m} u(\tau)$.

Sei nun umgekehrt $\tau = \{\tau_1 < \dots < \tau_{k-m-1}\}$ gegeben, so dass $u(\tau)$ einer der Summanden in $u^{(r)}$ ist. Bildet man $\sigma = \tau \cup \{\bar{\tau}_i\} = \{\sigma_1 < \dots < \sigma_{k-m}\}$ für ein $\bar{\tau}_i \in \{m+1, \dots, 2k - m - 1\} \setminus \tau$, so erhält man $\sigma_{r-1} < k \leq \sigma_r$ genau dann, wenn $\sigma_{r-1} = \tau_{r-1}$ oder $\sigma_r = \bar{\tau}_i \geq k$, also genau dann, wenn $\bar{\tau}_i \geq k$. Man hat

$$|\{\bar{\tau}_i: k \leq \bar{\tau}_i < 2k - m\}| = |\{k, \dots, 2k - m - 1\} \setminus \{\tau_r, \dots, \tau_{k-m-1}\}| = r,$$

also gibt es genau r verschiedene Mengen σ , so dass $u(\tau) = (-1)^{k-m} w(\sigma, \nu)$ für ein ν . Ist andererseits $r > 1$ und $u(\tau)$ ein Summand von $u^{(r-1)}$, also $\tau_{r-2} < k \leq \tau_{r-1}$, so ergibt sich analog $\sigma_{r-1} < k \leq \sigma_r$ genau dann, wenn $\bar{\tau}_i < k$, und es gibt $k - m - r + 1$ solche Zahlen. Die Summanden $w(\sigma, \nu)$ auf der linken und die Summanden $(-1)^{k-m} u(\tau)$ auf der rechten Seite von (*) stimmen damit überein. \square

Beweis von 3.2.1. Für eine Basis (e_1, \dots, e_n) von V bezeichnen $e_\sigma \otimes e_\tau$ mit $|\sigma| = |\tau| = k$ und $e_\alpha \otimes e_\beta$ mit $|\alpha| = k - 1$, $|\beta| = k + 1$, die Elemente der induzierten Basen

von $\bigwedge^k V \otimes \bigwedge^k V$ und $\bigwedge^{k-1} V \otimes \bigwedge^{k+1} V$. Man entnimmt 3.1.15, dass jeweils das Bild der Restriktion von \mathbf{P}_k auf die Unterräume

$$W_{\varrho, \varsigma} := \text{span}\{e_\sigma \otimes e_\tau : \sigma \cup \tau = \varrho, \sigma \cap \tau = \varsigma\} \subset \bigwedge^k V \otimes \bigwedge^k V$$

in den Unterräumen

$$U_{\varrho, \varsigma} := \text{span}\{e_\alpha \otimes e_\beta : \alpha \cup \beta = \varrho, \alpha \cap \beta = \varsigma\} \subset \bigwedge^{k-1} V \otimes \bigwedge^{k+1} V$$

enthalten ist, und diese Unterräume bilden Zerlegungen von $\bigwedge^k V \otimes \bigwedge^k V$ und $\bigwedge^{k-1} V \otimes \bigwedge^{k+1} V$ in direkte Summen, mit Summation über alle Vereinigungen $\varrho \subset \{1, \dots, n\}$ mit $|\varrho| = k, \dots, \min\{n, 2k\}$ und jeweils alle Schnitte $\varsigma \subset \varrho$ mit $|\varsigma| = 2k - |\varrho|$. Die Behauptung soll für die einzelnen Summanden gezeigt werden. Es sei also ein entsprechendes Paar $\varsigma \subset \varrho$ fixiert und zur Abkürzung die Restriktion $\mathbf{P}_k \upharpoonright_{W_{\varrho, \varsigma}} : W_{\varrho, \varsigma} \longrightarrow U_{\varrho, \varsigma}$ mit $P : W \longrightarrow U$ notiert.

Für $|\varrho| = |\varsigma| = k$ ist $U = 0$ und die Behauptung trivial, sei also $0 \leq m := |\varsigma| < k$. Lemma 3.2.2 dient nun dazu, für jedes $e_\alpha \otimes e_\beta \in U$ explizit ein Urbild unter P in W zu finden. Sei dazu eine geeignete Umbenennung $e_i \mapsto v_j$ vorgenommen, so dass $e_\alpha \otimes e_\beta = (v_1 \wedge \dots \wedge v_{k-1}) \otimes (v_1 \wedge \dots \wedge v_m \wedge v_k \wedge \dots \wedge v_{2k-m})$ erfüllt ist. In der Notation von 3.2.2 gilt dann bis auf Vorzeichen $e_\alpha \otimes e_\beta = \pm u^{(k-m)}$, da $m < \tau_1 < \dots < \tau_{k-m-1} < k$ für $\tau = \{\tau_1, \dots, \tau_{k-m-1}\}$ nur mit $\tau = \{m+1, \dots, k-1\}$ erfüllt ist. Es ist klar, dass die Vektoren $w^{(r)}$, bzw. $u^{(r)}$, $r = 1 \dots k-m$, jeweils linear unabhängig sind, sie bilden also Basen von $(k-m)$ -dimensionalen Unterräumen $W' \subset W$ und $U' \subset U$. Die Restriktion $P \upharpoonright_{W'} : W' \longrightarrow U'$ wird durch das Gleichungssystem (*) beschrieben und bezüglich dieser Basen durch die obere Dreiecksmatrix

$$(-1)^{k-m} \begin{pmatrix} 1 & k-m-1 & & 0 \\ & 2 & \ddots & \\ & 0 & \ddots & 1 \\ & & & k-m \end{pmatrix}$$

dargestellt, deren Determinante $(-1)^{k-m}(k-m)!$ in der vorausgesetzten Charakteristik nicht verschwindet. Insbesondere ist $P \upharpoonright_{W'} : W' \longrightarrow U'$ also surjektiv und $e_\alpha \otimes e_\beta \in U'$ hat ein Urbild in W' . \square

Mit der in 2.3.9 (S.30) definierten partiellen Ordnung \leq auf $\binom{n}{k}$, die durch

$$\sigma \leq \tau \iff \sigma_i \leq \tau_i \quad \forall i = 1 \dots k$$

für $\sigma = \{\sigma_1 < \dots < \sigma_k\}$ und $\tau = \{\tau_1 < \dots < \tau_k\}$ gegeben ist (s. 2.3.10), folgt aus 3.2.1 mit 2.4.9 (S.36):

3.2.3 KOROLLAR

Es ist

$$\dim_{\mathbb{K}} \ker \mathbf{P}_k = \binom{n}{k}^2 - \binom{n}{k-1} \binom{n}{k+1}$$

die Anzahl der Paare (σ, τ) mit $\sigma, \tau \in \binom{n}{k}$ und $\sigma \leq \tau$.

Es soll nun eine entsprechende Basis von $\ker \mathbf{P}_k$ konstruiert werden. Dazu seien die Paare (σ, τ) mit $\sigma, \tau \in \binom{[k]}{n}$ lexikographisch angeordnet, d. h. mit

$$(\sigma, \tau) \prec (\sigma', \tau') \iff \sigma \prec \sigma' \text{ oder } (\sigma = \sigma' \text{ und } \tau \prec \tau'), \quad (3.2.4)$$

so dass insbesondere $\sigma < \sigma'$ immer $(\sigma, \tau) \prec (\sigma', \tau')$ impliziert (vgl. 2.4.1). Die folgende Definition erweist sich als nützlich.

3.2.5 DEFINITION

Es sei $\mathbf{F}_k: \bigwedge^k V \otimes \bigwedge^k V \longrightarrow \bigwedge^k V \otimes \bigwedge^k V$ die Abbildung mit

$$\begin{aligned} (v_1 \wedge \dots \wedge v_k) \otimes (v_{k+1} \wedge \dots \wedge v_{2k}) \\ \longmapsto \sum_{h \in H_k} (v_{h(1)} \wedge \dots \wedge v_{h(k)}) \otimes (v_{h(k+1)} \wedge \dots \wedge v_{h(2k)}) \end{aligned}$$

für $v_1, \dots, v_{2k} \in V$, wobei $H_k \subset \mathfrak{S}_{2k}$ die von den Transpositionen $(i, k+i)$, $i = 1 \dots k$, erzeugte Untergruppe bezeichnet.

3.2.6 LEMMA

Es sei (e_1, \dots, e_n) eine Basis von V und es bezeichne $(e_\sigma \otimes e_\tau)_{\sigma, \tau}$ die induzierte Basis von $\bigwedge^k V \otimes \bigwedge^k V$. Für $\sigma \leq \tau$ hat $\mathbf{F}_k(e_\sigma \otimes e_\tau)$ die Darstellung

$$\mathbf{F}_k(e_\sigma \otimes e_\tau) = 2^q \sum_{\nu} s_\nu e_{\sigma(\nu)} \otimes e_{\tau(\nu)}$$

mit Koeffizienten $s_\nu \in \{\pm 1\}$ und paarweise verschiedenen $(\sigma(\nu), \tau(\nu))$, wobei $e_\sigma \otimes e_\tau$ mit Koeffizient 1 vorkommt. Dabei ist $q = |q(\sigma, \tau)|$ mit

$$q(\sigma, \tau) := \{i: \sigma_i = \tau_i\}$$

für $\sigma = \{\sigma_1 < \dots < \sigma_k\}$ und $\tau = \{\tau_1 < \dots < \tau_k\}$. Es gilt ferner $\sigma \leq \sigma(\nu)$ und $\tau(\nu) \leq \tau$ für alle ν .

Beweis. Man kann die Permutationen aus $H_k \cong (\mathbb{Z}/2)^k$ als die Teilmengen $h \subset \{1, \dots, k\}$ auffassen, indem man jede Transposition $(i, k+i)$ mit $i \in \{1, \dots, k\}$ identifiziert. Dann ist

$$\mathbf{F}_k(e_\sigma \otimes e_\tau) = \sum_{h \subset \{1, \dots, k\}} c_h e_{\sigma(h)} \otimes e_{\tau(h)},$$

mit $\sigma(h) = (\sigma \setminus \{\sigma_i: i \in h\}) \cup \{\tau_i: i \in h\}$, $\tau(h) = (\tau \setminus \{\tau_i: i \in h\}) \cup \{\sigma_i: i \in h\}$ und Koeffizienten $c_h \in \{0, \pm 1\}$, wobei $c_h \neq 0$ genau dann, wenn $|\sigma(h)| = |\tau(h)| = k$. Dass unter der Voraussetzung $\sigma \leq \tau$ für $c_h \neq 0$ immer $\sigma \leq \sigma(h)$ gilt, ist klar, denn für $\sigma(h) = \{\sigma'_1 < \dots < \sigma'_k\}$ und $\nu \in h$ mit $\tau_\nu = \sigma'_\mu$ ist $\mu \geq \nu$ und daher $\sigma'_\nu \geq \sigma_\nu$, und analog ergibt sich $\tau(h) \leq \tau$ für alle h . Es gilt genau dann $(\sigma(h), \tau(h)) = (\sigma, \tau)$, wenn $h \subset q(\sigma, \tau)$, so dass jedenfalls $e_\sigma \otimes e_\tau$ in der Summe 2^q -mal mit Koeffizient 1 vorkommt. Ist $\sigma' = \{\sigma'_1 < \dots < \sigma'_k\} \geq \sigma$ gegeben, so gilt $\sigma' = h(\sigma)$ für genau diejenigen h , die von der Form $h = h \cup \{i: \sigma'_i > \sigma_i\}$ mit $h \subset q(\sigma, \tau)$ sind, und das Vorzeichen c_h hängt nur von σ' ab. Damit tritt jeder der Summanden zu einem gegebenem Paar (σ', τ') , das von der Form $(h(\sigma), h(\tau))$ für ein $h \in H_k$ ist, 2^q -mal mit gleichem Vorzeichen in der Summe auf. \square

3.2.7 PROPOSITION

Zu einer Basis (e_1, \dots, e_n) von V mit induzierter Basis $(e_\sigma \otimes e_\tau)_{\sigma, \tau}$ von $\bigwedge^k V \otimes \bigwedge^k V$ bezeichne S_k den von den Vektoren $e_\sigma \otimes e_\tau$ mit $\sigma \leq \tau$ erzeugten Unterraum. Es ist

$$0 \longrightarrow S_k \xrightarrow{\mathbf{F}_k \upharpoonright_{S_k}} \bigwedge^k V \otimes \bigwedge^k V \xrightarrow{\mathbf{P}_k} \bigwedge^{k-1} V \otimes \bigwedge^{k+1} V \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz. Insbesondere gilt $\text{im } \mathbf{F}_k = \ker \mathbf{P}_k$.

Beweis. Das Bild von $(v_1 \wedge \dots \wedge v_k) \otimes (v_{k+1} \wedge \dots \wedge v_{2k})$ unter der Komposition $\mathbf{P}_k \circ \mathbf{F}_k$ besteht mit 3.1.15 aus $k 2^k$ durch $H_k \times \{1, \dots, k\}$ indizierten Summanden der Form

$$\Sigma_h^i := (-1)^{i+1} (v_{h(1)} \wedge \dots \wedge \widehat{v_{h(i)}} \wedge \dots \wedge v_{h(k)}) \otimes (v_{h(k+1)} \wedge \dots \wedge v_{h(2k)} \wedge v_{h(i)}).$$

Man erhält für $h \in H_k$ und $i \in \{1, \dots, k\}$ mit $h' = (i, k+i) \cdot h$ jeweils

$$\begin{aligned} \Sigma_h^i + \Sigma_{h'}^i &= (-1)^{i+1} (v_{h(1)} \wedge \dots \wedge \widehat{v_{h(i)}} \wedge \dots \wedge v_{h(k-1)}) \otimes \\ &\quad \left(v_{h(k+1)} \wedge \dots \wedge v_{h(2k)} \wedge v_{h(i)} \right. \\ &\quad \left. + v_{h(k+1)} \wedge \dots \wedge v_{h(i)} \wedge \dots \wedge v_{h(2k)} \wedge v_{h(k+i)} \right) = 0, \end{aligned}$$

und wegen $(i, k+i)^2 = (1)$ läßt sich die ganze Summe zu $k 2^{k-1}$ solchen Paaren zusammenfassen. Daraus folgt $\text{im } \mathbf{F}_k \subset \ker \mathbf{P}_k$, und mit 3.2.3 genügt es nun zu zeigen, dass die Restriktion $\mathbf{F}_k \upharpoonright_{S_k}$ injektiv ist. Dies folgt jedoch direkt aus 3.2.6, da $\mathbf{F}_k \upharpoonright_{S_k}$ bezüglich der aus der Ordnung (3.2.4) resultierenden Basen $(e_\sigma \otimes e_\tau)_{\sigma, \tau}$ und $(e_\sigma \otimes e_\tau)_{\sigma \leq \tau}$ durch eine Matrix dargestellt wird, deren Zeilen (σ, τ) mit $\sigma \leq \tau$ eine untere Dreiecksmatrix mit Potenzen von 2 in der Diagonale bilden, die also in Charakteristik $\neq 2$ maximalen Rang hat. \square

3.2.8 LEMMA

Es gilt $\text{im } \mathbf{P}_k^* \supset W := \text{span} \{ \varphi \otimes \psi - \psi \otimes \varphi : \varphi, \psi \in \bigwedge^k V^\vee \}$.

Beweis. Mit 3.2.7 ist der Annulator von $\text{im } \mathbf{P}_k^*$ durch $(\text{im } \mathbf{P}_k^*)^\perp = \ker \mathbf{P}_k = \text{im } \mathbf{F}_k$ gegeben, und es genügt $\text{im } \mathbf{F}_k \subset W^\perp$ zu zeigen. Es sei die Notation von 3.2.6 übernommen, d. h. für $\sigma, \tau \in \binom{n}{k}$ und $h \subset \{1, \dots, k\}$ ist $h(e_\sigma \otimes e_\tau) := c_h e_{\sigma(h)} \otimes e_{\tau(h)}$ mit $c_h \in \{0, \pm 1\}$ der zugehörige Summand von $\mathbf{F}_k(e_\sigma \otimes e_\tau)$. Man erhält

$$\begin{aligned} \sigma(h) &= (\sigma \setminus \{\sigma_i : i \in h\}) \cup \{\tau_i : i \in h\} \\ &= \{\sigma_i : i \notin h\} \cup (\tau \setminus \{\tau_i : i \in h\}) = \tau(\bar{h}) \end{aligned}$$

mit $\bar{h} := \{1, \dots, k\} \setminus h$. Analog ist $\tau(h) = \sigma(\bar{h})$, also $\bar{h}(e_\sigma \otimes e_\tau) = c_h e_\tau(h) \otimes e_\sigma(h)$. Für $\varphi, \psi \in \bigwedge^k V^\vee$ folgt daraus

$$\begin{aligned} &\langle \mathbf{F}_k(e_\sigma \otimes e_\tau), \varphi \otimes \psi \rangle \\ &= \sum_{1 \in h} c_h (\langle e_{\sigma(h)} \otimes e_{\tau(h)}, \varphi \otimes \psi \rangle + \langle e_{\tau(h)} \otimes e_{\sigma(h)}, \varphi \otimes \psi \rangle) \\ &= \sum_{1 \in h} c_h (\langle e_{\sigma(h)}, \varphi \rangle \langle e_{\tau(h)}, \psi \rangle + \langle e_{\tau(h)}, \varphi \rangle \langle e_{\sigma(h)}, \psi \rangle) \\ &= \langle \mathbf{F}_k(e_\sigma \otimes e_\tau), \psi \otimes \varphi \rangle, \end{aligned}$$

also $\langle \mathbf{F}_k(e_\sigma \otimes e_\tau), \varphi \otimes \psi - \psi \otimes \varphi \rangle = 0$ und $\mathbf{F}_k(e_\sigma \otimes e_\tau) \in W^\perp$. \square

Der Vektorraum W aus 3.2.8 ist isomorph zu $\bigwedge^2 \bigwedge^k V^\vee$, d.h. man hat eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow W \longrightarrow \bigwedge^k V^\vee \otimes \bigwedge^k V^\vee \longrightarrow \text{Sym}^2 \bigwedge^k V^\vee \longrightarrow 0$$

und es folgt $\text{im } \overline{\mathbf{P}}_k = \text{im } \mathbf{P}_k^* / W$.

3.2.9 KOROLLAR

Der quadratische Teil des graduierten Koordinatenrings $\mathbf{K}[\mathbf{p}]/\mathcal{I}_{k,n}$ von $\mathfrak{G}(k, V)$ ist der Vektorraum

$$H^0(\mathfrak{G}(k, V), \mathcal{O}_{\mathfrak{G}(k, V)}(2)) = (\text{Sym}^2 \bigwedge^k V^\vee) / \text{im } \overline{\mathbf{P}}_k = (\ker \mathbf{P}_k)^\vee.$$

Insbesondere ist

$$\dim_{\mathbf{K}} \text{im } \overline{\mathbf{P}}_k = \binom{n}{k-1} \binom{n}{k+1} - \binom{\binom{n}{k}}{2},$$

die Anzahl der Paare (σ, τ) , $\sigma, \tau \in \binom{n}{k}$, mit $\sigma \preceq \tau$ und $\sigma \not\prec \tau$ (vgl. 2.3.9, S.30, und 2.4.10, S.36).

3.2.10 THEOREM

Zu jeder Basis (e_1, \dots, e_n) von V mit induzierter Basis $(e_\sigma^* e_\tau^*)_{\sigma \preceq \tau}$ von $\text{Sym}^2 \bigwedge^k V^\vee$ hat der Unterraum $\text{im } \overline{\mathbf{P}}_k$ eine Basis $(f_{\sigma, \tau})_{\sigma \perp \tau}$ mit

$$f_{\sigma, \tau} := e_\sigma^* e_\tau^* - \sum_{\nu} c_\nu e_{\sigma(\nu)}^* e_{\tau(\nu)}^* \quad (\sigma, \tau \in \binom{n}{k}, \sigma \perp \tau)$$

mit Koeffizienten $c_\nu \in \mathbb{Z}$, wobei $c_1 = 1$ und

$$\sigma(\nu) \leq \sigma(1) = \sigma \wedge \tau \quad \text{und} \quad \sigma \vee \tau = \tau(1) \leq \tau(\nu)$$

sowie $\sigma(\nu) \cup \tau(\nu) = \sigma \cup \tau$ für alle ν für alle ν nach geeigneter Sortierung der Summanden.

Beweis. Es wird zunächst eine Basis von $\text{im } \mathbf{P}_k^*$ konstruiert. Mit 3.2.7 gilt $\text{im } \mathbf{P}_k^* = \ker \mathbf{F}_k^*$, wobei $\mathbf{F}_k^*: \bigwedge^k V^\vee \otimes \bigwedge^k V^\vee \rightarrow S_k^\vee$ bezüglich der Basen $(e_\alpha^* \otimes e_\beta^*)_{\alpha \leq \beta}$ und $(e_\sigma^* \otimes e_\tau^*)_{\sigma, \tau}$ durch eine Matrix dargestellt wird, in deren Zeilen $(\alpha \leq \beta)$ die Koeffizienten $\pm 2^q$ für $q = |q(\alpha, \beta)|$ der minimalen Darstellung aus 3.2.6 von $\mathbf{F}_k(e_\alpha \otimes e_\beta)$ stehen. Speziell steht 2^q nach 3.2.6 in jeder Zeile $(\alpha \leq \beta)$ in der Spalte $(\sigma, \tau) = (\alpha, \beta)$, und wegen $\alpha \leq \alpha(\nu)$ für alle Summanden $s_\nu e_{\alpha(\nu)} \otimes e_{\beta(\nu)}$ von $\mathbf{F}_k(e_\alpha \otimes e_\beta)$ verschwinden die Einträge in den Spalten $(\sigma, \tau) \prec (\alpha, \beta)$. Die Summanden $c_\nu e_{\alpha(\nu)} \otimes e_{\beta(\nu)}$ mit $(\alpha(\nu), \beta(\nu)) \neq (\alpha, \beta)$ und $\alpha(\nu) \leq \beta(\nu)$ lassen sich schrittweise eliminieren, indem man jeweils eine Ersetzung

$$\mathbf{F}_k(e_\alpha \otimes e_\beta) \longleftarrow c \mathbf{F}_k(e_\alpha \otimes e_\beta) - c' \mathbf{F}_k(e_{\alpha(\nu)} \otimes e_{\beta(\nu)}) \quad (c, c' \in \mathbb{Z} \text{ geeignet}) \quad (*)$$

vornimmt (Gauss-Elimination). Dabei bleibt die Eigenschaft $\alpha \leq \alpha(\nu)$ und $\beta(\nu) \leq \beta$ für alle Summanden $s_\nu e_{\alpha(\nu)} \otimes e_{\beta(\nu)}$ der Ersetzung erhalten, und in der Ersetzung

sind alle Koeffizienten durch den Koeffizienten $c_0 \neq 0$ zum Summanden $c_0 e_\alpha \otimes e_\beta$ teilbar. Normierung ergibt also jeweils eine modifizierte Summe

$$\tilde{F}_k(e_\alpha \otimes e_\beta) = e_\alpha \otimes e_\beta + \sum_{\nu} c_\nu e_{\alpha(\nu)} \otimes e_{\beta(\nu)}$$

mit Koeffizienten $c_\nu \in \mathbb{Z}$ und $\alpha \leq \alpha(\nu) \not\leq \beta(\nu) \leq \beta$ für alle ν . In der resultierenden Matrix haben nur noch die Spalten $(\sigma \not\leq \tau)$ von Null verschiedene Einträge. Eine Basis $(\tilde{f}_{\sigma,\tau})_{\sigma \not\leq \tau}$ von $\ker \mathbf{F}_k^*$ ist somit durch Koeffizientenvektoren $v_{\sigma,\tau}$ für $\sigma \not\leq \tau$ gegeben, wobei

$$v_{\sigma,\tau}(\alpha, \beta) = \begin{cases} 1, & \text{falls } (\alpha, \beta) = (\sigma, \tau), \\ -c, & \text{falls } \alpha \leq \beta \text{ und } c e_\sigma \otimes e_\tau \text{ ein Summand in } \tilde{F}_k(e_\alpha \otimes e_\beta) \text{ ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Insbesondere gilt also $\alpha \leq \sigma$ und $\tau \leq \beta$ für $v_{\sigma,\tau}(\alpha, \beta) \neq 0$. In der Notation von 3.2.6 ist außerdem

$$h(\sigma \wedge \tau) = (\sigma \wedge \tau \setminus \{\min(\sigma_i, \tau_i) : i \in h\}) \cup \{\max(\sigma_i, \tau_i) : i \in h\} = \sigma$$

für alle $h \subset \{1, \dots, k\}$ mit $h = \tilde{h} \cup \{i : \sigma_i > \tau_i\}$, $\tilde{h} \subset q(\sigma, \tau)$, erfüllt, und (σ, τ) geht dann aus $(\sigma \wedge \tau, \sigma \vee \tau)$ durch Austausch der durch h indizierten Elemente ohne Umsortierung hervor. In der Summe $\mathbf{F}_k(e_{\sigma \wedge \tau} \otimes e_{\sigma \vee \tau})$ tritt daher der Summand $c e_\sigma \otimes e_\tau$ mit Koeffizient $c = 2^q$ auf, und er bleibt während der Elimination (*) erhalten, da weder $\sigma \wedge \tau < \alpha < \sigma$ noch $\tau < \beta < \sigma \vee \tau$ für ein Paar (α, β) in Frage kommt. Daraus folgt $v_{\sigma,\tau}(\sigma \wedge \tau, \sigma \vee \tau) = -1$.

Unter der mit 3.2.8 definierten Quotientenabbildung $\ker \mathbf{F}_k^* = \text{im } \mathbf{P}_k^* \rightarrow \text{im } \bar{\mathbf{P}}_k$ bleiben nun die durch $v_{\sigma,\tau}$ definierten Summen

$$\tilde{f}_{\sigma,\tau} = \sum_{\alpha, \beta} v_{\sigma,\tau}(\alpha, \beta) e_\alpha^* \otimes e_\beta^* = e_\sigma^* \otimes e_\tau^* - \sum_{\nu} c_\nu e_{\sigma(\nu)}^* \otimes e_{\tau(\nu)}^*$$

für $\sigma \prec \tau$ unverändert erhalten, denn wegen $\sigma(\nu) \leq \sigma$ und $\tau \leq \tau(\nu)$ für alle ν kann sowohl $e_{\sigma(\nu)}^* \otimes e_{\tau(\nu)}^*$ als auch $e_{\tau(\nu)}^* \otimes e_{\sigma(\nu)}^*$ nur für $\tau < \sigma$ in der Summe vorkommen. Da wegen $\sigma(\nu) \leq \sigma \wedge \tau < \sigma \vee \tau \leq \tau(\nu)$ jeweils genau ein Summand $c_\nu e_{\sigma(\nu)}^* \otimes e_{\tau(\nu)}^*$ mit $\sigma \not\leq \tau$ vorkommt, sind die Bilder der $\tilde{f}_{\sigma,\tau}$ für $\sigma \prec \tau$ in $\text{im } \bar{\mathbf{P}}_k$ linear unabhängig und bilden mit 3.2.9 eine Basis mit den geforderten Eigenschaften. \square

3.2.11 BEISPIEL

Für $k = 2$ berechnet man

$$\dim \text{im } \bar{\mathbf{P}}_2 = \binom{n}{1} \binom{n}{3} - \binom{\binom{n}{2}}{2} = \binom{n}{4},$$

und die $\binom{n}{4}$ Polynome aus 3.1.5 (S.49),

$$p_{ij}p_{\nu\mu} - p_{iv}p_{j\mu} + p_{i\mu}p_{j\nu},$$

bilden die Basis 3.2.10 von $\text{im } \bar{\mathbf{P}}_2$, wobei $i\mu \not\leq j\nu$ mit $ij < i\nu = i\mu \wedge j\nu$ und $i\mu \vee j\nu = j\mu < \nu\mu$ für $1 \leq i < j < \nu < \mu \leq n$.

3.2.12 BEMERKUNG

Für $n < 8$ beobachtet man, dass alle Koeffizienten in den Polynomen $f_{\sigma,\tau} \in \mathcal{G}_{k,n}$ von der Form ± 1 sind. Man erhält aber beispielsweise für $k = 4$ und $n = 8$:

$$\begin{aligned} f_{1458,2367} &= p_{1458}p_{2367} - p_{1357}p_{2468} + p_{1356}p_{2478} + p_{1347}p_{2568} - p_{1346}p_{2578} \\ &\quad + p_{1345}p_{2678} + p_{1257}p_{3468} - p_{1256}p_{3478} - p_{1247}p_{3568} + p_{1246}p_{3578} \\ &\quad - p_{1245}p_{3678} + p_{1237}p_{4568} - p_{1236}p_{4578} + 2p_{1235}p_{4678} - 2p_{1234}p_{5678}. \end{aligned}$$

Wie in 2.3 bemerkt wurde, hat die in 2.4.3 (S.33) definierte graduierte umgekehrt lexikographische Ordnung $>_{dp}$ als Termordnung auf $\mathbb{K}[\mathbf{p}]$ die Eigenschaft, dass für $\sigma \perp \tau$ immer

$$p_\sigma p_\tau >_{dp} p_{s \wedge \tau} p_{\sigma \vee \tau}$$

gilt. Nun folgt aus 3.2.10 zusammen mit 3.1.14, dass für das Initialmonom $\text{in}_{dp}(f) = \mathbf{p}^{\mathbf{u}}$ eines Polynoms $f \in \mathfrak{J}_{k,n}$ immer ein Paar $\sigma \perp \tau \in \text{supp}(\mathbf{u})$ existiert, woraus

$$\text{in}_{dp}(\mathfrak{J}_{k,n}) = \langle p_\sigma p_\tau : \sigma \perp \tau \rangle$$

folgt. Da ferner der Term $p_\sigma p_\tau$ mit $\sigma \perp \tau$ in $f_{\sigma,\tau}$ mit Koeffizient 1 vorkommt und $\sigma(\nu) < \tau(\nu)$ für alle anderen Terme $c_\nu p_{\sigma(\nu)} p_{\tau(\nu)}$ gilt, ist die \mathbb{K} -Vektorraum-Basis 3.2.10 zugleich eine reduzierte Gröbner-Basis, wie sie in 2.4.2 (S.33) definiert wurde.

3.2.13 KOROLLAR

Die Menge

$$\mathcal{G}_{k,n} := \{f_{\sigma,\tau} : \sigma \perp \tau\}$$

mit den in 3.2.10 definierten homogenen quadratischen Polynomen $f_{\sigma,\tau} \in \mathbb{K}[\mathbf{p}]$ ist die reduzierte Gröbner-Basis des Plücker-Ideals $\mathfrak{J}_{k,n}$ bezüglich $>_{dp}$.

Insbesondere ist ein Monom genau dann ein Standardmonom, also nicht in $\text{in}_{dp}(\mathfrak{J}_{k,n})$ enthalten, wenn der Support eine Kette in der partiellen Ordnung \leq bildet.

3.2.14 KOROLLAR

Die Polynome der Form

$$\det_{\sigma(1)} \cdots \det_{\sigma(t)} \in \mathbb{K}[\mathbf{t}] \quad (\sigma(1) \leq \dots \leq \sigma(t) \in \binom{[n]}{k}, t \in \mathbb{N})$$

bilden eine \mathbb{K} -Vektorraum-Basis der von den k -Minoren in $\mathbb{K}[\mathbf{t}]$ erzeugten Plücker-Algebra $\mathcal{O}_{\mathfrak{G}(k,n)}(\mathfrak{G}(k,n))$.

3.3 Plücker-Relationen in der Darstellungstheorie

Es sollen hier noch die Ergebnisse aus 3.2 für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $V = \mathbb{C}^n$ aus Sicht der Darstellungstheorie betrachtet werden. Dabei stellt sich heraus, dass der Vektorraum $\ker \mathbf{P}_k \subset \bigwedge^k V \otimes \bigwedge^k V$ (s. 3.1.13, S.51), dessen Dualraum der quadratische Teil des homogenen Koordinatenrings der Grassmannschen ist (s. 3.2.9, S.58), eine irreduzible Darstellung der allgemeinen linearen Gruppe $\text{GL}_n \mathbb{C}$ bildet. Als Referenz zu Begriffen der Darstellungstheorie dienen [FH91] und [Ful97].

Es sei eine natürliche Zahl $d > 0$ fixiert. Wie in 2.6 bereits in anderem Zusammenhang erwähnt wurde, assoziiert man zu einer Partition $\lambda = (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_m)$ von $d = \lambda_1 + \dots + \lambda_m$ ein *Young-Diagramm*, also eine Tabelle von d Zellen

in m Zeilen, so dass in der i -ten Zeile von oben gezählt linksseitig ausgerichtet λ_i Zellen stehen. Die Zellen des Young-Diagramms λ indizieren die d Kopien von V im kartesischen Produkt $V^{\times\lambda} := V \times \dots \times V$. Die folgende Definition ist [Ful97](8.1) entnommen.

3.3.1 DEFINITION

Es sei ein \mathbb{C} -Vektorraum U und eine \mathbb{C} -multilineare Abbildung $\varphi: V^{\times\lambda} \longrightarrow U$ mit folgenden Eigenschaften gegeben:

- (1) φ ist alternierend in den Einträgen jeder Spalte von λ , d.h. es ist $\varphi(\mathbf{v}) = 0$ für $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_d)$, sobald $v_i = v_j$ für ein Paar $i \neq j$, mit i und j in der selben Spalte von λ .
- (2) Für $\mathbf{v} \in V^{\times\lambda}$ gilt stets $\varphi(\mathbf{v}) = \sum \varphi(\mathbf{w})$, mit Summation über alle $\mathbf{w} \in V^{\times\lambda}$, die man aus \mathbf{v} erhält, indem man zwei Spalten in λ wählt und alle Einträge der ersten Spalte mit den Einträgen einer festen Teilmenge der zweiten Spalte austauscht.

Der Schur-Modul zur Partition λ ist der eindeutig bestimmte \mathbb{C} -Vektorraum $\mathbb{S}_\lambda V$, mit der universellen Eigenschaft, dass zu U, φ wie oben eine multilineare Abbildung $\lambda: V^{\times\lambda} \longrightarrow \mathbb{S}_\lambda V$ und ein eindeutig bestimmter \mathbb{C} -Vektorraum-Homomorphismus $\tilde{\varphi}: \mathbb{S}_\lambda V \longrightarrow U$ existiert, so dass λ die Bedingungen (1) und (2) erfüllt und $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \lambda$ gilt.

Der Schur-Modul ist eine Verallgemeinerung des symmetrischen und des alternierenden Produkts. Für das einzeilige Diagramm $\lambda = (d)$ ist Bedingung (1) aus 3.3.1 hinfällig, während (2) dann bedeutet, dass alle Einträge kommutieren. Man erhält also $\mathbb{S}_{(d)} V = \text{Sym}^d V$ und umgekehrt auch $\mathbb{S}_{(1, \dots, 1)} V = \bigwedge^d V$ für das einspaltige Diagramm $\lambda = (1, \dots, 1)$. Der folgende Satz ist fundamental und wird z.B. in [Ful97](8.2, Th.2) bewiesen.

3.3.2 PROPOSITION

Hat λ höchstens n Zeilen, so ist $\mathbb{S}_\lambda V$ eine irreduzible Darstellung von $\text{GL}_n \mathbb{C}$ und alle irreduziblen polynomialen Darstellungen¹ von $\text{GL}_n \mathbb{C}$ sind von dieser Form.

Eine explizite Einbettung $\mathbb{S}_\lambda V \hookrightarrow \bigotimes^d V$ ist durch die folgende Konstruktion gegeben, die hier aus [FH91] (Lec.6) zitiert wird. Dazu sei λ mit einer festen Nummerierung durch $1 \dots d$ versehen, so dass eine Identifikation $\mathfrak{S}_d = \mathfrak{S}(\lambda)$ gegeben ist. Die Gruppenalgebra zu \mathfrak{S}_d ist der freie Vektorraum $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_d]$ mit Basis $\{e_\pi\}_{\pi \in \mathfrak{S}_d}$, auf dem die Multiplikation $e_\pi e_{\tilde{\pi}} = e_{\pi\tilde{\pi}}$ definiert ist. Die (rechtsseitige) Gruppenwirkung von \mathfrak{S}_d auf $\bigotimes^d V$, die durch $(v_1 \otimes \dots \otimes v_d) \cdot \pi = v_{\pi(1)} \otimes \dots \otimes v_{\pi(d)}$ gegeben ist, macht die Elemente aus $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_d]$ zu Endomorphismen auf $\bigotimes^d V$.

3.3.3 LEMMA

Es bezeichne R_λ die Untergruppe in \mathfrak{S}_d , die aus denjenigen Permutationen besteht, welche die Zeilen in λ erhalten (also $R_\lambda \cong \mathfrak{S}_{\lambda_1} \times \dots \times \mathfrak{S}_{\lambda_m}$), und C_λ die Untergruppe derjenigen Permutationen, welche die Spalten erhalten. Es sei $a_\lambda, b_\lambda, c_\lambda \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_d]$ mit

¹Eine Darstellung $\rho: \text{GL}_n \mathbb{C} \longrightarrow \text{GL}(W)$ heißt *polynomial*, wenn sie nach Wahl einer Basis von $W \cong \mathbb{C}^N$ durch N^2 Polynome (in n^2 Variablen) gegeben ist.

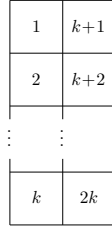
$$a_\lambda := \sum_{\pi \in R_\lambda} e_\pi, \quad b_\lambda := \sum_{\pi \in C_\lambda} \operatorname{sgn}(\pi) e_\pi$$

und $c_\lambda := a_\lambda \cdot b_\lambda$. Der Schur-Modul $\mathbb{S}_\lambda V$ ist das Bild von c_λ als Endomorphismus auf $\otimes^d V$.

3.3.4 THEOREM

Der Vektorraum $\ker \mathbf{P}_k \subset \wedge^k V \otimes \wedge^k V$ (s. 3.1.13, S.51) ist für $V = \mathbb{C}^n$ der Schur-Modul $\mathbb{S}_\lambda V$ zur Partition $\lambda: 2k = 2 + \dots + 2$.

Beweis. Es sei die erste Spalte im Diagramm $\lambda = (2, \dots, 2)$ von oben nach unten mit $1 \dots k$ und die zweite Spalte mit $k+1 \dots 2k$ nummeriert:



Mit $C_\lambda = \mathfrak{S}(\{1, \dots, k\}) \times \mathfrak{S}(\{k+1, \dots, 2k\})$ entsprechend 3.3.3 erhält man b_λ als Einbettung

$$b_\lambda: \wedge^k V \otimes \wedge^k V \hookrightarrow \otimes^{2k} V, \\ (v_1 \wedge \dots \wedge v_k) \otimes (v_{k+1} \wedge \dots \wedge v_{2k}) \mapsto \sum_{\pi \in C_\lambda} \operatorname{sgn}(\pi) v_{\pi(1)} \otimes \dots \otimes v_{\pi(2k)}.$$

Daher ist $\mathbb{S}_\lambda V = \operatorname{im}(a_\lambda \circ b_\lambda)$ als Unterraum von $\wedge^k V \otimes \wedge^k V$ das Bild von $a_\lambda = \mathbf{F}_k$, da $R_\lambda = H_k$ von den Transpositionen $(i, k+i)$ für $i = 1 \dots k$ erzeugt wird (s. 3.2.5, S.56). Die Behauptung folgt also aus 3.2.7. \square

3.3.5 BEMERKUNG

Als Verallgemeinerung der Zerlegung $V \otimes V = \wedge^2 V \oplus \operatorname{Sym}^2 V$ liefert die *Formel von Pieri* (s. [FH91], 15.25) die Zerlegung

$$\wedge^k V \otimes \wedge^k V = \bigoplus_{i=0}^k \mathbb{S}_{\lambda(i)} V, \quad (3.3.6)$$

wobei die Diagramme $\lambda(i)$ aus dem Diagramm zur Partition $k = 1 + \dots + 1$ durch Hinzufügen von k Zellen hervorgehen, und zwar so, dass keine zwei Zellen in der selben Zeile angefügt werden. Es ist also $\lambda(i) = (2, \dots, 2, 1, \dots, 1)$ mit i 2en. Für $k = 2$ ist beispielsweise

$$\wedge^2 V \otimes \wedge^2 V = \wedge^4 V \oplus \mathbb{S}_{(2,1,1)} V \oplus \ker \mathbf{P}_2: \quad \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$$

Die Diagramme $\lambda(i)$ mit $i < k$ sind dabei gerade diejenigen, die aus dem Diagramm zur Partition $k-1 = 1 + \dots + 1$ durch Hinzufügen von $k+1$ Zellen nach der selben Regel hervorgehen, so dass anstelle von 3.3.6 tatsächlich

$$\wedge^k V \otimes \wedge^k V = (\wedge^{k-1} V \otimes \wedge^{k+1} V) \oplus \ker \mathbf{P}_k$$

geschrieben werden kann, was für den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ also bereits die Surjektivität von \mathbf{P}_k impliziert, die mit 3.2.1 allgemeiner gezeigt wurde.

3.4 Die flache Deformation der Grassmannschen

Es soll nun, unter Verwendung der Ergebnisse aus 2.4 und 3.2, die Degeneration der Grassmannschen $\mathfrak{G}(k, n)$ zur Torischen Varietät $X(k, n)$ als *flache Deformation* im Sinne der Deformationstheorie beschrieben werden.

Es werden zunächst kurz die bisherigen Beobachtungen zusammengefasst. In 1.2.10 (S.14) wurde das Plücker-Ideal

$$\mathfrak{J}_{k,n} = \ker(p_\sigma \mapsto \det_\sigma)$$

und in 2.1.1 (S.22) das torische Ideal

$$I_{k,n} = \ker(p_\sigma \mapsto d_\sigma)$$

mit Diagonal-Monomen d_σ definiert, wobei sich die Determinante \det_σ mit der Leibnizformel als Summe

$$\det_\sigma = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_k} \operatorname{sgn}(\pi) \pi \cdot d_\sigma$$

von permutierten Diagonal-Monomen schreiben lässt. In 2.3.9 (S.30) wurde ein distributiver Verband auf der Indexmenge $\binom{n}{k}$ definiert, und es wurde in 2.4.5 (S.34) gezeigt, dass $I_{k,n}$ von den Binomen der Form

$$p_\sigma p_\tau - p_{\sigma \wedge \tau} p_{\sigma \vee \tau}, \quad (3.4.1)$$

indiziert durch die Paare $\sigma, \tau \in \binom{n}{k}$ mit $\tau \prec \sigma$ und $\sigma \not\prec \tau$, erzeugt wird, während in 3.2.10 und 3.2.13 nun gezeigt wurde, dass $\mathfrak{J}_{k,n}$ das Erzeugnis von genauso indizierten homogenen quadratischen Polynomen der Form

$$p_\sigma p_\tau - p_{\sigma \wedge \tau} p_{\sigma \vee \tau} + \sum_{\nu} c_\nu p_{\sigma(\nu)} p_{\tau(\nu)} \quad (3.4.2)$$

ist, wobei die Koeffizienten c_ν aus \mathbb{Z} sind und die Indizes $\sigma(\nu)$ und $\tau(\nu)$ die Eigenschaft haben, dass $\sigma(\nu) < \sigma \wedge \tau$ und $\tau(\nu) > \sigma \vee \tau$, sowie $\sigma(\nu) \cup \tau(\nu) = \sigma \cup \tau$, für alle ν gilt.

Insbesondere liefert die \mathbb{K} -Vektorraum-Basis der Plücker-Algebra $\mathbb{K}[\mathbf{p}]/\mathfrak{J}_{k,n}$ aus Standardmonomen (s. 3.2.14) offensichtliche \mathbb{K} -Vektorraum-Isomorphismen

$$H^0(\mathfrak{G}(k, n), \mathcal{O}_{\mathfrak{G}(k,n)}(m)) \cong H^0(X(k, n), \mathcal{O}_{X(k,n)}(m))$$

für alle $m \in \mathbb{N}$.

3.4.3 KOROLLAR

Die projektiven Varietäten $\mathfrak{G}(k, n)$ und $X(k, n)$ haben das selbe Hilbert-Polynom

$$h(m) = \left| \left\{ (\sigma_{(1)}, \dots, \sigma_{(m)}) : \sigma_{(1)} \leq \dots \leq \sigma_{(m)} \in \binom{n}{k} \right\} \right| \quad (m \in \mathbb{N}).$$

Insbesondere ist das $(k(n-k))!$ -fache des Leitkoeffizienten,

$$\deg \mathfrak{G}(k, n) = (k(n-k))! \prod_{i=1}^k \frac{(k-i)!}{(n-i)!},$$

auch der Grad der Grassmannschen (s. 2.6.1, S.44)

3.4.4 BEMERKUNG

Die aus 3.4.1, bzw. 3.4.2, resultierende Darstellung

$$v = \sum_u c_u u \quad (0 \neq c_u \in \mathbb{K}, u \text{ Standardmonome})$$

eines Nicht-Standardmonoms v aus einer Summe von Standardmonomen mit den hier gegebenen Eigenschaften ist bekannt als sogenannte *straightening relation*, wobei in diesem Zusammenhang der aus der Theorie der Gröbner-Basen bekannte Begriff *Standardmonom* aus einer partiellen Ordnung heraus definiert wird, die auf Erzeugern der zugrundeliegenden Algebra gegeben ist (vgl. [BH93], 7.1).

Der Begriff einer *flachen Familie* von Algebren oder Varietäten wird ausführlich in [Eis94](Ch.6) diskutiert. Eine Familie von Varietäten besteht aus den Fasern $\varphi^{-1}(\{b\})$ über den Punkten $b \in B$ zu einem Morphismus $\varphi: X \rightarrow B$ von Varietäten. Eine solche Familie heißt flach, wenn zu jedem Punkt $x \in X$ eine affine Umgebung U von x und eine affine Umgebung V von $\varphi(x)$ existiert, so dass φ eine Restriktion $U \rightarrow V$ induziert und der Koordinatenring $S = \mathcal{O}_U(U)$ flach als $\mathcal{O}_V(V)$ -Modul¹ ist, wobei S durch den induzierten Homomorphismus von Koordinatenringen zu einer $\mathcal{O}_V(V)$ -Algebra wird. Insbesondere bezeichnet man eine Varietät Y als *flache Deformation* oder *Degeneration* einer Varietät X in der speziellen Situation, dass die Koordinatenringe durch $\mathcal{O}_X(X) = S/I$ und $\mathcal{O}_Y(Y) = S/\hat{I}$ für $S = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_r]$ und Ideale $I, \hat{I} \subset S$ gegeben sind, so dass für ein Ideal J in $S[t]$ die \mathbb{K} -Algebra $S[t]/J$ flach als $\mathbb{K}[t]$ -Modul ist und

$$S[t]/J \otimes_{\mathbb{K}[t]} \mathbb{K}[t, t^{-1}] \cong S/I[t, t^{-1}], \quad (*)$$

sowie

$$S[t]/J \otimes_{\mathbb{K}[t]} \mathbb{K}[t]/\langle t \rangle \cong S/\hat{I}. \quad (**)$$

Das bedeutet, man hat eine flache Familie $\varphi: \mathbb{A}^r \rightarrow \mathbb{A}^1$ so dass die *allgemeine Faser* über jedem Punkt $0 \neq u \in \mathbb{K}$ isomorph zu X ist, während Y die *spezielle Faser* über 0 bildet. Die Flachheit garantiert dabei, dass gewisse Konstanten wie Dimension und Grad bei der Deformation erhalten bleiben.

Beispielsweise erhält man zu einer Termordnung $>$ auf S die *Gröbner-Degeneration* von X bzgl. $>$, indem man das Initialideal $\text{in}_>(I)$ für \hat{I} nimmt (s. 2.4.2, S.33). Dies ist ein Spezialfall der folgenden Standard-Konstruktion einer flachen Deformation, die [Eis94](Th.15.17) entnommen ist.

3.4.5 LEMMA

Es sei $S = \mathbb{K}[\mathbf{x}] = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_r]$. Eine Gewichtsfunktion $\lambda: \mathbb{Z}^r \rightarrow \mathbb{Z}$ definiert eine partielle Ordnung $>_\lambda$ auf der Menge der Monome in S . Für $g \in S$ sei

$$\tilde{g} := t^b g(t^{-\lambda(x_1)}, \dots, t^{-\lambda(x_r)}) \in S[t],$$

wobei b den maximalen Wert aller $\lambda(\mathbf{u})$ zu den an g beteiligten Exponenten $\mathbf{u} \in \mathbb{N}^r$ bezeichnet und λ abkürzend als Funktion von Monomen notiert ist. Weiter sei $\text{in}_\lambda(g)$ die Summe der Terme in g , deren Exponent bzgl. $>_\lambda$ maximal ist. Für ein Ideal $I \subset S$

¹Ein Modul M über einem Ring R heißt flach, wenn für jede Inklusion $N' \subset N$ von R -Moduln die induzierte Abbildung $M \otimes_R N' \rightarrow M \otimes_R N$ ebenfalls eine Inklusion ist.

sei $\text{in}_\lambda(I) := \langle \text{in}_\lambda(g) : g \in I \rangle$ das Initialideal, und es sei \tilde{I} das Ideal $\langle \tilde{g} : g \in I \rangle$ in $S[t]$.

Dann ist $S[t]/\tilde{I}$ flach als $\mathbb{K}[t]$ -Modul und es sind $(*)$ und $(**)$ mit $J = \tilde{I}$ und $\hat{I} = \text{in}_\lambda(I)$ erfüllt, d.h. $S[t]/\tilde{I}$ ist eine flache Familie über $\mathbb{K}[t]$ mit spezieller Faser $S/\text{in}_\lambda(I)$ und allgemeiner Faser S/I .

Man hat also $\tilde{g} = \text{in}_\lambda(g) + tg'$ mit $g' \in S[t]$, und um aus 3.4.5 Die Gröbner-Degeneration zu erhalten, stellt man die gegebene Termordnung $>$ durch einen Gewichtsvektor dar, so dass $\text{in}_\lambda(I) = \text{in}_>(I)$ gilt.

Eine geeignete Gewichtsfunktion, mit der man $X(k, n)$ als Degeneration der Grassmannschen $\mathfrak{G}(k, n)$ erhält, wird explizit bei [GL96](Th.5.2) angegeben und hier zitiert.

3.4.6 THEOREM

Die Torische Varietät $X(k, n)$ ist eine Degeneration der Grassmannschen $\mathfrak{G}(k, n)$ i.S.v. 3.4.5.

Beweis. Man wähle eine feste natürliche Zahl $N > n$. Die N -adische Darstellung

$$N_\sigma := \sum_{i=1}^k \sigma_i N^{k-i}$$

von $\sigma = \{\sigma_1 < \dots < \sigma_k\}$ definiert die Gewichtsfunktion

$$\lambda: \mathbb{Z}^{\binom{n}{k}} \longrightarrow \mathbb{Z}, \mathbf{u} = (u_\sigma)_\sigma \longmapsto \lambda(\mathbf{u}) = - \sum_\sigma u_\sigma N_\sigma.$$

Zu zeigen ist, dass für die Erzeuger

$$f_{\sigma, \tau} = p_\sigma p_\tau - p_{\sigma \wedge \tau} p_{\sigma \vee \tau} + \sum_\nu c_\nu p_{\sigma(\nu)} p_{\tau(\nu)} \quad (\sigma \perp \tau \in \binom{n}{k})$$

der Plücker-Ideals $\mathfrak{J}_{k, n}$ (s. 3.4.2) stets $\text{in}_\lambda(f_{\sigma, \tau}) = p_\sigma p_\tau - p_{\sigma \wedge \tau} p_{\sigma \vee \tau}$ gilt. Zu $\sigma = \{\sigma_1 < \dots < \sigma_k\}$ und $\tau = \{\tau_1 < \dots < \tau_k\}$ hat man $\sigma \vee \tau = \{m_1 < \dots < m_k\}$ und $\sigma \wedge \tau = \{n_1 < \dots < n_k\}$ mit $m_i = \max\{\sigma_i, \tau_i\}$ und $n_i = \min\{\sigma_i, \tau_i\}$ für $i = 1 \dots k$ (s. 2.3.10, S.31). Also gilt jedenfalls $N_\sigma + N_\tau = N_{\sigma \wedge \tau} + N_{\sigma \vee \tau}$. Sei nun $\sigma(\nu) = \alpha = \{\alpha_1 < \dots < \alpha_k\}$ und $\tau(\nu) = \beta = \{\beta_1 < \dots < \beta_k\}$ für ein ν in der Darstellung von $f_{\sigma, \tau}$. Also gilt $\sigma \vee \tau < \beta$, und ist s die kleinste Zahl $s \in \{1, \dots, k\}$ mit $\beta_s > m_s$, so folgt wegen $\alpha < \sigma \wedge \tau$ und $\alpha \cup \beta = \sigma \cup \tau$ nun $\alpha_i = n_i$ für $i = 1 \dots s$. Damit gilt $\alpha_s + \beta_s > m_s + n_s = \sigma_s + \tau_s$, also $N_\alpha + N_\beta > N_\sigma + N_\tau$. \square

Literatur

- [BCKS98] V.V. Batyrev, I. Ciocan-Fontanine, B. Kim, and D. van Straten. Mirror symmetry and toric degenerations of partial flag manifolds. arXiv:math.alg-geom/9803108, 1998.
- [BH93] Winfried Bruns and Jürgen Herzog. *Cohen-Macaulay Rings*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [BW93] Thomas Becker and Volker Weispfennig. *Gröbner Bases*. Springer Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1993.
- [Cox03] David A. Cox. What is a toric variety? *Contemp. Math.*, 334:203–223, 2003. In *Topics in algebraic geometry and geometric modeling*.
- [EH99] David Eisenbud and Joe Harris. *The Geometry of Schemes*. Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1999.
- [Eis94] David Eisenbud. *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*. Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1994.
- [FH91] William Fulton and Joe Harris. *Representation Theory*. Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, Tokyo, 1991.
- [Ful93] William Fulton. *Introduction to Toric Varieties*. Princeton University Press, Princeton, 1993.
- [Ful97] William Fulton. *Young Tableaux: with applications to representation theory and geometry*. London Math. Soc. Student Texts, 35. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [GH78] Phillip Griffiths and Joseph Harris. *Principles of Algebraic Geometry*. John Wiley & Sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, 1978.
- [GL96] N. Gonciulea and V. Lakshmibai. Degenerations of flag and schubert varieties to toric varieties. *Transformation Groups*, 1(3):215–248, 1996.
- [Grü67] Branko Grünbaum. *Convex Polytopes*. John Wiley & Sons, Ltd, London, New York, Sydney, 1967.
- [Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1977.
- [Har92] Joe Harris. *Algebraic Geometry*. Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1992.
- [Hil03] Lutz Hille. Quivers, cones and polytopes. *Linear Algebra and its Applications*, 365:215 – 237, 2003. Dedicated to Idun Reiten on the occasion of her sixtieth birthday.
- [HP53] W.V.D. Hodge and D. Pedoe. *Methods of Algebraic Geometry*. Two volumes. Cambridge University Press, London, 1953.

- [Hum75] James E. Humphreys. *Linear Algebraic Groups*. Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1975.
- [Kaw91] Katsuo Kawakubo. *The Theory of Transformation Groups*. Oxford University Press, Oxford, New York, Tokyo, 1991.
- [MS04] Ezra Miller and Bernd Sturmfels. *Combinatorial Commutative Algebra*. Springer Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 2004.
- [Oda88] T. Oda. *Convex Bodies and Algebraic Geometry*. Springer Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1988.
- [PS92] I. M. Pak and A. V. Stoyanovskii. A bijective proof of the hook-length formula and its analogues. *Funkt. Anal. Priloz.* 26, No. 3:80–82, 1992.
- [Sat75] Ichiro Satake. *Linear Algebra*. Marcel Dekker, Inc., New York, 1975.
- [Sha94] Igor R. Shafarevich. *Basic Algebraic Geometry*, volume 2. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1977,1994.
- [Sta86] Richard P. Stanley. Two poset polytopes. *Discrete Comput. Geom.*, 1(1):9–23, 1986.
- [Sta99] R.P. Stanley. *Enumerative Combinatorics*, volume 2, pages 219–229. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [Stu95] Bernd Sturmfels. *Gröbner Bases and Convex Polytopes*. American Mathematical Society, University Lecture Series, Providence, RI, 1995.
- [Vám78] P. Vámos. The missing axiom of matroid theory is lost forever. *London Math. Soc.*, 18:403–408, 1978.